

# СИНТЕЗ ДВУМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛИНИИ СРЕЗА

Лукашевич Ю.А., Судаков А.А., Приоров А.Л.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова  
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская 14. Тел.: (0852) 32-11-94. E-mail: cat@uniyar.ac.ru

**Реферат.** Получены выражения для линии среза двумерных цифровых фильтров с тремя независимыми коэффициентами. Проведена аппроксимация линии среза уравнением эллипса. Составлен алгоритм синтеза двумерных цифровых фильтров по заданным параметрам линии среза.

## 1. Введение

Двумерные цифровые фильтры различного вида широко используются для обработки изображений. Если эта обработка производится в реальном времени, то стремятся добиться желаемого результата обработки при помощи как можно более простых алгоритмов, к которым и принадлежат двумерные цифровые фильтры первого и второго порядков, алгоритм работы которых описывается разностным уравнением вида:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 a(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) - \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_2=0 \\ k_1+k_2 \neq 0}}^2 \sum_{k_2=0}^2 b(k_1, k_2) y(n_1 - k_1, n_2 - k_2),$$

где  $x(n_1, n_2)$  – входное воздействие,  $y(n_1, n_2)$  – реакция фильтра на это входное воздействие,  $a(k_1, k_2)$ ,  $b(k_1, k_2)$  – коэффициенты фильтра. Частотные свойства таких фильтров были изучены ранее [1-8], теперь же, на основании проведенных исследований, разработан алгоритм синтеза фильтров по заданным параметрам линии среза.

## 2. Алгоритм синтеза

При исследовании частотных свойств двумерных цифровых фильтров первого и второго порядков с тремя независимыми коэффициентами было получено выражение для линии среза. Это выражение было аппроксимировано уравнением эллипса вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = R^2, \quad (1)$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $R$  зависят от выбора типа фильтра и определяются через его коэффициенты, а  $x$ ,  $y$  – обобщенные координаты, определяемые положением максимума амплитудно-частотной характеристики (АЧХ). Уравнение (1) ортогональным преобразованием (поворот координатных осей на угол  $\theta$ ) приводится к виду

$$Eu^2 + Fv^2 = R^2, \quad (2)$$

где  $E$ ,  $F$ ,  $R$  определяют радиусы эллипса:  $R_u = \frac{R}{\sqrt{E}}$ ,  $R_v = \frac{R}{\sqrt{F}}$ . При повороте координатных осей на угол  $\theta$ , координаты преобразуются следующим образом:

$$u = x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta,$$

$$v = -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \quad (3)$$

Покажем связь между коэффициентами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $R$  и параметрами эллипса  $R_u$ ,  $R_v$ ,  $\theta$ . Подставим (3) в уравнение (2):

$$E(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)^2 + F(-x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^2 = R^2.$$

После преобразований получим

$$x_1^2 (E \cos^2 \theta + F \sin^2 \theta) + x_2^2 (E \sin^2 \theta + F \cos^2 \theta) + 2x_1 x_2 (E - F) \sin \theta \cos \theta = R^2.$$

Сравнивая это уравнение с (1), получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} A = E \cos^2 \theta + F \sin^2 \theta \\ B = (E - F) \cos \theta \sin \theta \\ C = E \sin^2 \theta + F \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (4)$$

Пусть исходно даны радиусы эллипса  $R_u$ ,  $R_v$  и угол поворота  $\theta$ . Из уравнения (2) имеем

$$E = \frac{R^2}{R_u^2}, \quad F = \frac{R^2}{R_v^2}.$$

Подставляя последние выражения в (4), получим

$$\begin{cases} A = R^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\sin^2 \theta}{R_v^2} \right) \\ B = R^2 \left( \frac{1}{R_u^2} - \frac{1}{R_v^2} \right) \cos \theta \sin \theta \\ C = R^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\cos^2 \theta}{R_v^2} \right), \end{cases}$$

или, учитывая, что  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $R$  являются функциями параметров фильтра  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\begin{cases} A(a,b,c) = R^2(a,b,c) \left( \frac{\cos^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\sin^2 \theta}{R_v^2} \right) \\ B(a,b,c) = R^2(a,b,c) \left( \frac{1}{R_u^2} - \frac{1}{R_v^2} \right) \cos \theta \sin \theta \\ C(a,b,c) = R^2(a,b,c) \left( \frac{\sin^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\cos^2 \theta}{R_v^2} \right). \end{cases}$$

Решая эту систему, находим значения параметров  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , соответствующие поставленной задаче.

### 3. Примеры синтеза фильтров

Для примера рассмотрим синтез цифровых рекурсивных фильтров нижних и верхних частот первого порядка. Фильтры нижних частот используются для сглаживания границ и для уменьшения импульсного шума в изображениях и телевизионных сигналах, фильтры верхних частот традиционно используются для подчеркивания границ в системах распознавания образов и цифровой обработки изображений. Алгоритм работы цифрового рекурсивного фильтра первого порядка можно представить в

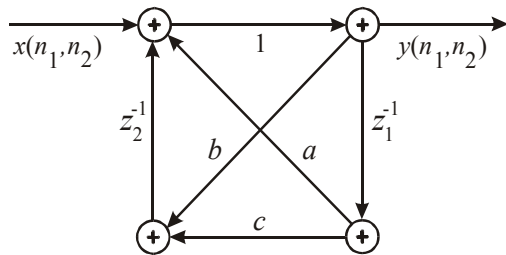


Рис. 1.

виде направленного графа (рис. 1) или описать разностным уравнением вида:

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) - ay(n_1 - 1, n_2) - by(n_1, n_2 - 1) - cy(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

**Пример 1:** На рис.2а приведен пример синтеза двумерного рекурсивного цифрового фильтра нижних частот по описанному выше алгоритму. На рисунке введены следующие обозначения:

- · — - линия заданного эллипса;
- — — - линия полученного аппроксимирующего эллипса;
- - линия среза фильтра с полученными коэффициентами.

Заданы радиусы эллипса  $R_u=0.5\pi$ ,  $R_v=0.3\pi$  и угол поворота относительно осей  $\alpha=30^\circ$ . Получены следующие параметры фильтра:  $a=0.4$ ,  $b=0.45$ ,  $c=-0.23$ . На рис.2б представлена АЧХ фильтра с полученными параметрами.

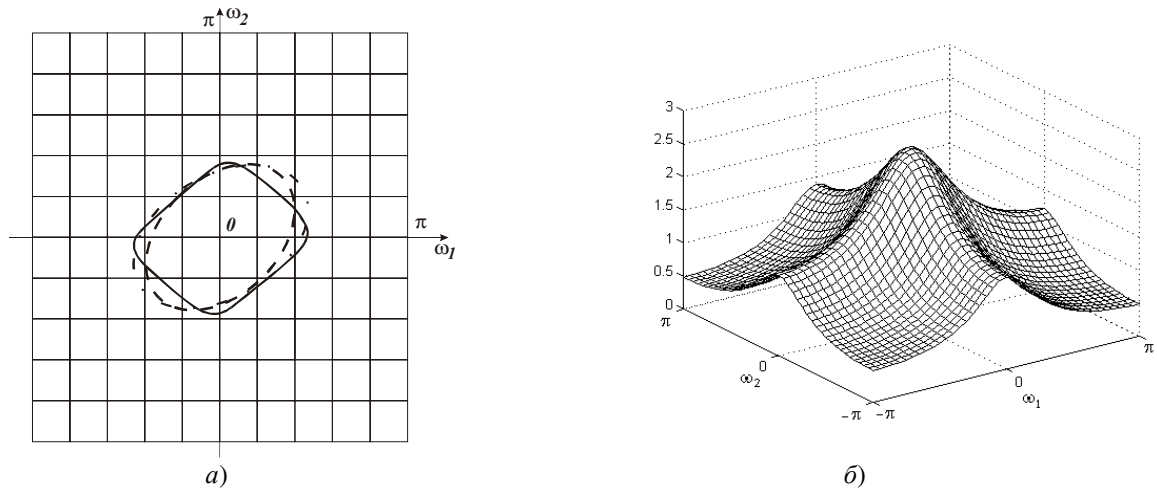


Рис. 2.

**Пример 2:** На рис.3а приведен пример синтеза двумерного рекурсивного цифрового фильтра верхних частот. Заданы радиусы эллипса  $R_u=0.6\pi$ ,  $R_v=0.5\pi$  и угол поворота относительно осей  $\theta=0^\circ$ . Получены следующие параметры фильтра:  $a=-0.28$ ,  $b=-0.24$ ,  $c=-0.07$ . На рис.3б представлена АЧХ фильтра с полученными параметрами.

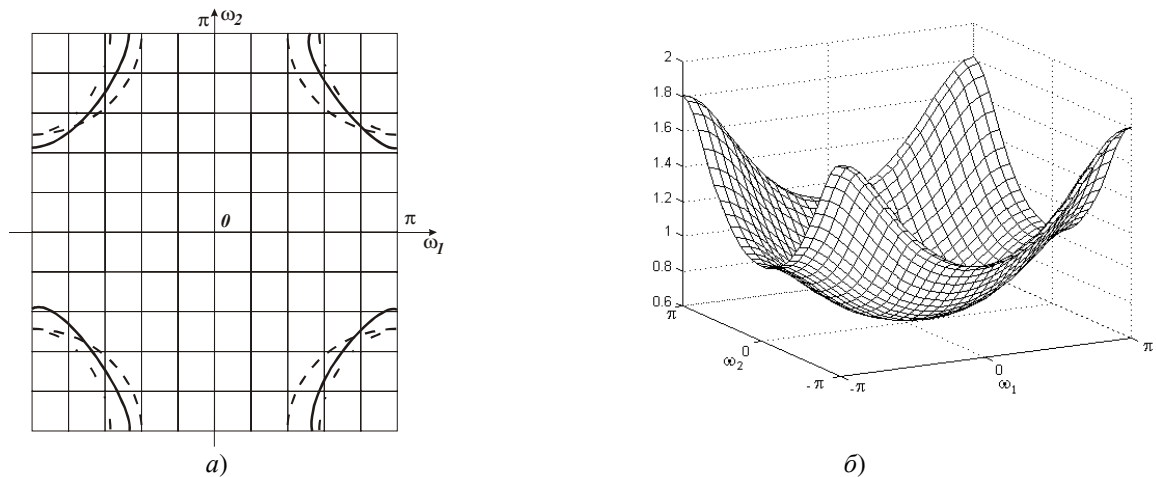


Рис.3

Таким образом, составлен алгоритм синтеза фильтров с использованием аппроксимирующего уравнения эллипса. Экспериментальная проверка алгоритма показала, что для рекурсивных фильтров можно получить более узкие области пропускания, чем для нерекурсивных.

#### Библиография

1. Лукашевич Ю.А., Приоров А.Л. Анализ частотных свойств двумерных нерекурсивных цифровых фильтров первого порядка // докл. 2-ой междунар. конф. и выставки "Цифровая обработка сигналов и ее применения" (DSPA'99), Москва, 1999. Т.3. С.615-619.
2. Приоров А.Л., Тарасов В.Л. Исследование двумерных рекурсивных цифровых ФНЧ и ФВЧ второго порядка // докл. науч.-техн. конф. "Радио и волоконно-оптическая связь, локация и навигация", Воронеж, 22-24 апреля 1997. С.1006-1010.
3. Тарасов В.Л., Приоров А.Л., Балусов И.Л. Двумерные цифровые рекурсивные системы второго порядка с позиций анализа их частотных свойств // Материалы 2-й Всеросс. науч.-техн. конф. «Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем», Чебоксары, 1997. С.32-33.
4. Балусов И.Л., Тарасов В.Л., Приоров А.Л. Частотная избирательность двумерного цифрового рекурсивного фильтра второго порядка с симметрией параметров // Материалы 2-й Всеросс. науч.-техн. конф. «Динамика нелинейных дискретных электротехнических и электронных систем», Чебоксары, 1997. С.33-35.
5. Калинин С.А., Приоров А.Л., Балусов И.Л. Анализ двумерной рекурсивной цифровой системы второго порядка в частотной области // Труды IV междунар. науч.-техн. конф. «Радиолокация, навигация, связь», Воронеж, 1998. Т-II. С.632-641.

6. Балусов И.Л., Приоров А.Л. Исследование двумерных рекурсивных цифровых фильтров второго порядка в частотной области // Материалы первой междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применения» (DSPA'98), 1998. Т.3. С.213-220.
7. Лукашевич Ю.А., Приоров А.Л., Судаков А.А. Обработка зашумленных изображений двумерными цифровыми КИХ-фильтрами с симметричными коэффициентами// Труды 5-й междунар. науч.-технич. конф. "Радиолокация, навигация и связь". Воронеж, 1999. Т.1. С 395-401.
8. Брюханов Ю.А., Приоров А.Л., Мясников Е.А., Калинин С.А. Частотные свойства двумерных рекурсивных цифровых систем первого порядка // Радиотехника, 1995. № 4, С.26-30. (Изв. высш. учеб. заведений).



**DESIGN OF 2-D DIGITAL FILTERS WITH THE USE OF THE CUTOFF LINE**

Lukashevich Yu.A., Sudakov A.A., Priorov A.L.

Yaroslavl State University  
Sovetskaja 14, Yaroslavl, Russia, 150000, Phone: (0852) 32-11-94, E-mail: cat@uniyar.ac.ru

**Abstract:** Expression for the cutoff line of 2-D digital filters with three independent coefficients are obtained. The cutoff line is approximated by an ellipse. An algorithm for 2-D digital filters design according to certain cutoff line parameters is proposed.

**1. Introduction**

Two-dimensional digital filters of different kind are widely used in image processing. If the processing proceeds in real time the desired result of the processing is usually achieved with the help of simplest algorithms. 2-D digital filters of the first and second order belong to such algorithms. They are described by the following difference equation:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^2 \sum_{k_2=0}^2 a(k_1, k_2)x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) - \sum_{\substack{k_1=0 \\ k_1+k_2 \neq 0}}^2 \sum_{k_2=0}^2 b(k_1, k_2)y(n_1 - k_1, n_2 - k_2),$$

where  $x(n_1, n_2)$  is an input signal,  $y(n_1, n_2)$  – the response of the filter on the input signal,  $a(k_1, k_2)$ ,  $b(k_1, k_2)$  are the filter coefficients. The frequency properties of these filters were investigated in [1, 2]. Here, on the base of the conducted researches an algorithm of filter design according to the certain cutoff line parameters is worked out.

**2. Design algorithm**

By researching frequency properties of two-dimensional digital filters of the first and second order with three independent coefficients the expression for the cutoff line was derived. This expression was approximated by the ellipse equation:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = R^2, \tag{1}$$

where the coefficients  $A, B, C, R$  depend upon the filter type and are determined by it coefficients, and  $x, y$  – are generalized coordinates, which are determined by the location of the maximum of the amplitude-frequency response. The equation (1) is reduced to the following form by an orthogonal transformation

$$Eu^2 + Fv^2 = R^2, \tag{2}$$

where  $E, F, R$  determine the ellipse radius:  $R_u = \frac{R}{\sqrt{E}}, R_v = \frac{R}{\sqrt{F}}$ . By rotating the axes at the angle  $\theta$  the coordinates are transformed this way:

$$\begin{aligned} u &= x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\ v &= -x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta. \end{aligned} \tag{3}$$

Let us show the relation between the coefficients  $A, B, C, R$  and ellipse parameters  $R_u, R_v, \theta$ . Let us substitute (3) into the equation (2):

$$E(x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)^2 + F(-x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)^2 = R^2.$$

After some transformations we have

$$x_1^2 (E \cos^2 \theta + F \sin^2 \theta) + x_2^2 (E \sin^2 \theta + F \cos^2 \theta) + 2x_1 x_2 (E - F) \sin \theta \cos \theta = R^2.$$

Comparing this equation with (1), we build the following system of equations:

$$\begin{cases} A = E \cos^2 \theta + F \sin^2 \theta \\ B = (E - F) \cos \theta \sin \theta \\ C = E \sin^2 \theta + F \cos^2 \theta. \end{cases} \quad (4)$$

Let the radii  $R_u$  and  $R_v$  and the angle  $\theta$  initially be given. From the equation (2) it follows

$$E = \frac{R^2}{R_u^2}, \quad F = \frac{R^2}{R_v^2}. \quad (5)$$

Substituting (5) into (4) we receive the system

$$\begin{cases} A = R^2 \left( \frac{\cos^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\sin^2 \theta}{R_v^2} \right) \\ B = R^2 \left( \frac{1}{R_u^2} - \frac{1}{R_v^2} \right) \cos \theta \sin \theta \\ C = R^2 \left( \frac{\sin^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\cos^2 \theta}{R_v^2} \right), \end{cases}$$

or, taking into account that  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $R$  are the functions of the filter parameters  $a$ ,  $b$ ,  $c$  we arrive at the result

$$\begin{cases} A(a, b, c) = R^2(a, b, c) \left( \frac{\cos^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\sin^2 \theta}{R_v^2} \right) \\ B(a, b, c) = R^2(a, b, c) \left( \frac{1}{R_u^2} - \frac{1}{R_v^2} \right) \cos \theta \sin \theta \\ C(a, b, c) = R^2(a, b, c) \left( \frac{\sin^2 \theta}{R_u^2} + \frac{\cos^2 \theta}{R_v^2} \right). \end{cases}$$

The solution of this system gives us the parameters  $a$ ,  $b$ ,  $c$  corresponding to the stated problem.

Thus, the algorithm for filter design with epy use of the ellipse equation is worked out. An experimental check-up showed that for recursive filters pass bands can be move narrow than for nonrecursive ones.

#### Bibliography

1. Balusov I.L., Priorov A.L. Research of two-dimensional recursive digital second order filters in frequency area. // Proc. of 1nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'98), Moscow, 1998. V. III-E, pp.142-145.
2. Lukashevich Yu.A., Priorov A.L. Analysis of frequency properties of 2-D first order nonrecursive digital filters // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.3, pp.620-621.