ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ МНОГОМЕРНЫХ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

МироновВ.Г., Чобану М.К.

Московский энергетический институт (технический университет)
105835, ГСП, Москва Е-250, ул. Красноказарменная, д.17, каф. Электрофизики

Реферат: Рассматриваются многомерные системы, их основные свойства и характеристики, а также методы реализации многомерных цифровых фильтров как частного случая многомерных систем.

Введение

В настоящее время нашли широкое применение многомерные цифровые фильтры (МЦФ), которые являются частным случаем многомерных систем. Поэтому целесообразно рассмотреть основные свойства и характеристики линейных многомерных систем и их применение для синтеза МЦФ. Находят применение и нелинейные цифровые системы, однако, здесь они не рассматриваются.

Описание многомерных систем

Линейная многомерная система представляет собой систему в общем случае с множеством входов и множеством выходов, на зажимах которых действуют многомерные сигналы, т.е. сигналы, которые являются функциями нескольких переменных. Системы с одним входом и одним выходом при многомерных сигналах также являются многомерными.

Если $v=v(n_1,n_2)$, $y(n_1, n_2)$ - двумерные сигналы (или векторы таких сигналов), z - линейный оператор, то система (двумерная) определяется как

$$y(\cdot)=z\ v(\cdot) \qquad (1)$$

Сигналы $v(n_1,n_2)$, $y(n_1, n_2)$ в (1) представляют собой функции, определенные на множестве упорядоченных пар целых чисел, например,

$$v=\{v(n_1,n_2), -\infty<n_1, n_2 <\infty\}. \qquad (2)$$

В линейной системе, если

$$y_1=zv_1,\ \ y_2=zv_2 \qquad (3)$$

то

$$y=z[av_1+bv_2]=y_1+y_2 \qquad 4)$$

где a, b - вещественные или комплексные константы. Равенство (4) выражает две стороны принципа суперпозиции - аддитивность и гомогенность. Переменные n_1 и n_2 в (1)-(4) часто называют пространственными.

Системой, инвариантной с сдвигу, называется такая система, для которой справедливо равенство

$$z[(n_1-m_1, n_2-m_2)]=y(n_1-m_1, n_2-m_2) \qquad (5)$$

для всех значений v и любых целочисленных величин m_1, m_2.

Если система линейна и одновременно инвариантна к сдвигу, то ее называют ЛИС - системой. Ниже рассматриваются только ЛИС-системы.

В пространственной области ЛИС-система описывается импульсной характеристикой $h(n_1,n_2)$. Для многомерных фильтров часто удобнее пользоваться описанием системы в частотной области. С этой целью используется многомерное преобразование Фурье, которое может быть непрерывным или дискретным [1,2]. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

$$v(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1 N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} v(k_1,k_2)\exp(j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1+j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2) \qquad (5)$$

(для $0 \le k_1 \le N_1-1$; $0 \le k_2 \le N_2-1$) называют прямым, а преобразование

$$v(n_1,n_2)=\frac{1}{N_1 N_2}\sum_{k_1=0}^{N_1-1}\sum_{k_2=0}^{N_2-1} v(k_1,k_2)\exp(j\frac{2\pi}{N_1}n_1k_1+j\frac{2\pi}{N_2}n_2k_2) \qquad (6)$$

(для $0 \le n_1 \le N_1-1$; $0 \le n_2 \le N_2-1$) - обратным. При записи (5) и (6) опорная область R_{N1N2} определена в виде

$$R_{N1N2}=\{(n_1, n_2): 0 \le n_1 \le N_1-1,\ 0 \le n_2 \le N_2-1\}. \qquad (7)$$

Основные свойства преобразований (5) и (6) - линейность, циклические сдвиги, теорема Парсеваля, симметрия при вещественных сигналах, модуляция, отражение [1].

Нерекурсивные фильтры

Все фильтровые системы делятся на нерекурсивные и рекурсивные. При их проектировании решаются две задачи: аппроксимации и реализации. Ниже рассматривается задача реализации.

Нерекурсивные фильтры или фильтры с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтры) реализуются методами прямой свертки, ДПФ, секционированной свертки, причем, реализация проводится в пространственной области; сущность метода вытекает из его названия. Широко используются методы окон, или весовой функции (прямоугольное окно, окно Хемминга, Кайзера и др.). Эти методы характеризуются простотой аппроксимации и реализации, но требуют большого количества вычислений.

@2001, электронная версия подготовлена ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru

Все методы реализации КИХ-фильтров требуют больше вычислительных затрат, чем методы реализации рекурсивных фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтров). При реализации БИХ-фильтров возникает проблема устойчивости.

Рекурсивные фильтры

Для описания БИХ-фильтров используют разностные уравнения и передаточную функцию в комплексной z-плоскости. Разностное уравнение имеет вид:

$$\sum_{k_1}\sum_{k_2} b(k_1,k_2)y(n_1-k_1,n_2-k_2) = \sum_{r_1}\sum_{r_2} a(r_1,r_2)x(n_1-r_1,n_2-r_2) \qquad (8)$$

Применяя к (8) z-преобразование [1], получаем передаточную функцию фильтра («выход/вход»)

$$H_z(z_1,z_2) = \frac{\sum_{r_1=0}^{N_1}\sum_{r_2=0}^{N_2} a(r_1,r_2)z_1^{-r_1}z_2^{-r_2}}{\sum_{k_1=0}^{N_1}\sum_{k_2=0}^{N_2} b(k_1,k_2)z_1^{-k_1}z_2^{-k_2}}, \qquad (9)$$

где $z_1=e^{j\omega 1}$, $z_2=e^{j\omega 2}$, (ω_1, ω_2) - круговые частоты. Предполагаем, что опорная область массивов коэффициентов - первый квадрант z-области и выполнены все условия рекурсивной вычислимости [1]. Из (8) и (9) получаются разностные уравнения и передаточная функция для КИХ-фильтров, если принять коэффициенты $b(k_1,k_2)=0$ при всех k1,k2; часто b(0,0)=1.

БИХ-фильтры можно реализовать в прямой форме по (12) или (13); при этом используются каскадная или параллельная структуры. Обе эти структуры имеют ограничения на реализацию. Широкое применение получили итерационные методы реализации - базовая и обобщенная в частотной и пространственной областях. Подробности рассмотрены в [1,2].

Реализация в пространстве состояний

Достоинства одномерных фильтров, реализуемых в пространстве состояния, хорошо известны [4]. Поэтому представляет большой интерес развитие этой методики реализации применительно к многомерным фильтрам. В настоящее время описаны несколько подходов и моделей в пространстве состояния для многомерных фильтров. Как известно, модель Россера для многомерного фильтра с несколькими входами и выходами описывается уравнениями [3, 6] :

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = Ax(i,j) + Bv(i,j), \qquad (10)$$

$$y(i,j)=Cx(i,j)+Dv(i,j). \qquad (11)$$

где x- вектор состояния, содержащий вертикальную (x^v) и горизонтальную составляющую (x^h); v(.,.), y(.,.) - векторы входного воздействия и выходных переменных; A,B,C.D - матричные коэффициенты соответствующих размеров. Для простоты здесь размерность фильтра принята равной двум; система обработки сигнала принята линейной и инвариантной к сдвигу. Из уравнений (10) и (11) и анализа системы можно получить выражение для выходного сигнала в пространственной области:

$$\boldsymbol{y(i,j)=[C_1C_2]\left\{\sum_{k=0}^{j} A^{i,j-k}\begin{bmatrix} x^h(0,k) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{i} A^{i-l,j}\begin{bmatrix} 0 \\ x^v(l,0) \end{bmatrix} + \sum\sum A^{i-(l+1),j-k}\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-l,j-(k+1)}\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}\right\}\times} \text{В}$$

$$\boldsymbol{\times v(l,k)+dv(i,j).} \qquad \boldsymbol{(12)}$$

(12) записаны уравнения для элементов матриц, где двойная сумма ∑∑ вычисляется по индексам (0,0) ≤ l,k ≤ (i,j). Передаточную функцию в области комплексных переменных z_1 и z_2 можно представить в виде:

$$H(z_1,z_2) = [C_1C_2]\begin{bmatrix} z_1\cdot\mathbf{1}-A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2\cdot\mathbf{1}-A_4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + d = C[\mathbf{1}(z_1,z_2)-A]^{-1}v + d. \qquad (13)$$

В уравнении (13) $A_1...A_4$; C_1,C_2; b_1,b_2 - подматрицы матричных коэффициентов и векторов из (10); $1(z_1,z_2)=z^1\cdot 1\oplus z_2 1$, где ⊕ - знак прямой суммы матриц, 1 - единичная матрица соответствующего порядка.

Записанные выражения нетрудно преобразовать в соответствующие соотношения для элементов матриц x, y и H. Из этих соотношений предложены 2 алгоритма определения выходного сигнала; эти алгоритмы дуальны: один получается из другого заменой z_1 на z_2 и наоборот.

Для модели Форназини-Маркезини справедливы уравнения (при нескольких входах и нескольких выходах) [3]

$$x(k+1,l+1)=A_1x(k,l+1)+A_2x(k+1,l)+B_1v(k,l+1)+B_2v(k+1,l), \qquad (14)$$

$$y(k,l)=Cx(k,l)+Dv(k,l). \qquad (15)$$

Матрица передаточных функций модели имеет вид

$$H(z_1,z_2)=C(z_1z_21-z_2A_1-z_1A_2)^{-1}(z_2B_1+z_1B_2)+D, \tag{16}$$

где A_1,A_2 и B_1,B_2 - соответствующие подматрицы матриц A и B. Элемент передаточной матрицы $H(z_1,z_2)$ выражается как

$$H_{kl}(z_1,z_2)=C_k(z_1z_21-z_2A_1-z_1A_2)^{-1}(z_2B_{1l}+z_1B_{2l})+D_{kl}. \tag{17}$$

На основе этого выражения разработаны также два алгоритма реализации.

Для расчета частотных характеристик различных фильтров Россера определялось число операций для примеров разных фильтров (все программы и расчеты выполнены Н.С.Ивановой). При этом рассматривались основные и дуальные алгоритмы. Применялись различные методы вычисления обратных матриц. Число операций изменялось почти на 1 - 2 порядка у конкретных примеров. Поэтому при использовании различных алгоритмов нужно учитывать объем вычислений и проводить соответствующие сравнения.

Аналогично, для различных примеров, решаемых с помощью модели Форназини-Маркезини, получаются разные объемы вычислений. Однако, если сравнить по вычислительной эффективности модели Россера и Форназини-Маркезини, то можно убедиться, что алгоритмы, использующие модель Россера, значительно эффективнее по объему вычислений, чем модели Форназини-Маркезини.

Рассмотрение устойчивости передаточных функций многомерных фильтров является весьма важной задачей при проектировании фильтров. Для одномерного фильтра, как известно, уравнения состояния имеют вид

$$x(i+1)=Ax(i)+Bv(i), \tag{18}$$

$$y(i+1)=Cx(i)+Dx(i). \tag{19}$$

При этом передаточная матрица записывается как

$$H(z)=C(z1-A)^{-1}B+D \tag{20}$$

Отсюда следует, что все собственные значения матрицы A должны лежать внутри единичной окружности.

По критерию Ляпунова одномерный фильтр, представленный системой (18),(19), устойчив тогда и только тогда, когда для любой положительно-определенной матрицы Q существует единственная положительно-определенная матрица P, удовлетворяющая уравнению [4, 6]

$$A^TPA-P=-Q. \tag{21}$$

Для двумерных систем критерий (25) можно видоизменить следующим образом [3].

Двумерный цифровой фильтр, представленный передаточной функцией (16), устойчив (в смысле «ограниченный вход - ограниченный выход») тогда и только тогда, когда

а) Матрица A_1 не имеет собственных значений внутри единичного бикруга.

б) Уравнение Ляпунова

$$P^*(z)G(z)P(z)-G(z)=-W(z) \tag{22}$$

где $$G(z)=A_4+A_3(z1-A_1)^{-1}A_2, \tag{23}$$

имеет единственное положительно-определенное эрмитово решение P(z) для любой заданной матрицы W(z) - положительно-определенной эрмитовой матрицы.

Следует отметить, что обращение матрицы (z1-A) в двумерном случае целесообразно выполнять по обобщенному алгоритму Фаддеевой [5] и применять БПФ

.

Заключение

Актуальность проблемы развития методов синтеза многомерных систем для обработки цифровых сигналов, в частности, цифровых многомерных фильтров, требует создания различных методов реализации систем. Перспективным направлением такого развития является разработка методов синтеза в пространстве состояния, обладающих определенными преимуществами по сравнению с другими методами.

В докладе приводятся несколько моделей многомерных фильтров (в пространственной и частотной областях) и описаны предлагаемые алгоритмы реализации двумерных фильтров. Исследованы также вопросы устойчивости по Ляпунову и даны соответствующие критерии.

Литература.

1. Даджио Д., Мерсеро Р. Цифровая обработка многомерных сигналов. -М.: Мир, 1988.

2. Wu-Sheng Lu, Andreas Antoniou. - Two-Dimensional Digital Filters / N.Y.-Marul Dekker, 1992.

3. Wu-Cheng Lu, Andreas Antoniou. - New Algorithms for the Derivation on the Transfer - Function Matrices of 2-D State - Space Discrete Sistems. - IEEE Trans. On CAS, vol. 44, №2, 1977.

4. Ионкин П.А., Максимович Н.Г., Миронов В.Г. и др. - Синтез линейных электрических и электронных цепей (метод переменных состояния). Львов: Вища школа, 1982.

5. Гэ Чжан-су, Чжень Цзы-Цзун. Алгоритм Фаддеевой для пространственных динамических уравнений. - ТИИЭР, т.66, №9, 1978.

6. Миронов В.Г., Чобану М.К. Проблемы синтеза многомерных цифровых фильтров. Труды 1-й Международной конференции "Цифровая обработка сигналов и ее применения" DSPA'1998, Москва, 1998, стр.7-11.

BASIC PROPERTIES AND PERFORMANCE OF MULTI-DIMENSIONAL DIGITAL SIGNAL PROCESSING SYSTEMS

Mironov V.G., Tchobanou M.K.

Moscow Power Engineering Institute (Technical University)
105835, GSP, Moscow E-250, 17 Krasnokazarmennaya st., Dep-t of Electrical Physics

Abstract: the multi-dimensional systems, their basic properties and performances, and also methods of implementation of multi-dimensional digital filters as special case of multi-dimensional systems are considered.

1. Introduction of multi-dimensional systems

The linear multi-dimensional systems represent a system generally with a set of multi-dimensional inputs and outputs, i.e. the signals, which are functions of several variables. The systems one-port and one exit at multi-dimensional signals also are multi-dimensional.

If v=v (n1, n2), y (n1, n2) are two-dimensional signals (or vectors of such signals), z - a linear operator, the system (two-dimensional) is defined as

$$y(.) = z\, v(.) \tag{1}$$

The signals v (n1, n2), y (n1, n2) in (1) represent functions, particular on a set of ranked pairs of integers, for example,

$$v = \{v(n1, n2), - < n1, n2 <\}. \tag{2}$$

In a linear system, if $y1=zv1,\ y2=zv2,$ (3)

then $y=z\,[av1+bv2] = y1+y2,$ (4)

where a, b are real or complex constants.

The system, which is delay invariant, is such a system, for which the equality is valid

$$z\,[(n1-m1, n2-m2)] = y\,(n1-m1, n2-m2) \tag{5}$$

for all values v and any integer magnitudes m1, m2.

In a spatial domain the delay invariant systems are featured by a impulse response h(n1, n2). For multi-dimensional filters frequently it is more convenient to use representation of a system in frequency field. With this purpose the multi-dimensional Fourier transform is used which can be continuous or discrete [1,2].

2. Nonrecursive filters

All filtering systems are divided on nonrecursive and recursive. At their design two problems are solved: approximation and realization. A problem of realization is considered below.

The nonrecursive filters or filters with a finite impulse response (FIR) are implemented by methods of direct convolution, DFT, partitioned convolution, and, the realization will be carried out in a spatial domain; the essence of a method implies from his title. The methods of windowing, or weight function (rectangular window, window of the Hamming, Kaiser etc.) are widely used. These methods are characterized by a simplicity of approximating and realization, but lots of evaluations are required.

All methods of realiztion of FIR filters require more computing expenditures, than methods of realization of recursive filters with an infinite impulse response (IIR). At realization IIR filters the problem of stability should be solved.

3. Recursive filters

The description of IIR filters one can use difference equations and transfer function in a complex z-plane. Then one can obtain a transfer function of the filter («exit/input")

$$H_z(z_1, z_2) = \frac{\sum_{r_1=0}^{N_1}\sum_{r_2=0}^{N_2} a(r_1, r_2) z_1^{-r_1} z_2^{-r_2}}{\sum_{k_1=0}^{N_1}\sum_{k_2=0}^{N_2} b(k_1, k_2) z_1^{-k_1} z_2^{-k_2}}, \tag{6}$$

We guess, that the support of arrays of coefficients is the first quadrant of z-field and all requirements by recursive realization are carried out [1].

IIR filters can be implemented directly; thus are used cascade or parallel structure. Both these structures have limitations on realization. The wide application was received by iterative methods of embodying - base and generalized in frequency and spatial fields. The particularses are surveyed in [1,2].

4. Realization in the state space

The virtues of one-dimensional filters, realizable in space of a state, are well known [4]. Therefore represents major interest development of this procedure of realization with reference to multi-dimensional filters. Some approaches and models in space of a state for multi-dimensional filters now are circumscribed. As is known, the Roesser model for the multi-dimensional filter with several inputs and exits is featured by the equations [3, 5]:

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = Ax(i,j) + Bv(i,j), \qquad (7)$$

$$y(i,j) = Cx(i,j) + Dv(i,j). \qquad (8)$$

where x- a vector of a states containing vertical (xv) and horizontal component (xh); v (..), y (..) - vectors of input action and output variables; A, B, C.D - matrix coefficients of the relevant sizes. For a simplicity here dimension of the filter accepted equal to two; the system of handling of a signal accepted by linear and invariant to delay. From the equations (7) and (8) and analysis of a system it is possible to obtain an expression for the output signal in a spatial domain:

$$y(i,j) = [C_1 C_2]\left\{\sum_{k=0}^{j} A^{i,j-k}\begin{bmatrix} x^h(0,k) \\ 0 \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{i} A^{i-l,j}\begin{bmatrix} 0 \\ x^v(l,0) \end{bmatrix} + \sum\sum A^{i-(l+1),j-k}\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} + A^{i-l,j-(k+1)}\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}\right\}\times_{\mathrm{T}}$$

$$\times v(l,k) + dv(i,j). \qquad (9)$$

he transfer function in the field of complex variables z1 and z2 is possible to present as:

$$H(z_1,z_2) = [C_1 C_2]\begin{bmatrix} z_1 \cdot \mathbf{1} - A_1 & -A_2 \\ -A_3 & z_2 \cdot \mathbf{1} - A_4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + d = C[\mathbf{1}(z_1,z_2) - A]^{-1} v + d. \qquad (10)$$

For the Fornasini-Marchesini model the equations are valid at several inputs and several exits [3]

x(k+1,l+1)=A1x(k,l+1)+A2x(k+1,l)+B1v(k,l+1)+B2v(k+1,l), (11)

y (k, l) =Cx (k, l) +Dv (k, l). (12)

The matrix of transfer functions of model looks like

H(z1,z2)=C(z1z21-z2A1-z1A2)-1(z2B1+z1B2)+D, (13)

where A1, A2 and B1, B2 are relevant submatrixes of matrixes A and B. The elements of a transmission matrix H (z1, z2) are expressed as

Hkl(z1,z2)=Ck(z1z21-z2A1-z1A2)-1(z2B1l+z1B2l)+Dkl. (14)

On the basis of this expression two algorithms of embodying were designed.

Thus the basic and dual algorithms were considered. The different methods of an evaluation of inverse matrixes were applied. The number of operations varied almost 10 - 100 times for different examples.

References

1. Dudgeon D., Mersereau R. Digital Processing of Multi-Dimensional Signals. Moscow: MIR, 1988.

2. Wu-Sheng Lu, Andreas Antoniou. - Two-Dimensional Digital Filters / N.Y.-Marcel Dekker, 1992.

3. Wu-Cheng Lu, Andreas Antoniou. - New Algorithms for the Derivation on the Transfer - Function Matrices of 2-D State - Space Discrete Sistems. - IEEE Trans. On CAS, vol. 44, №2, 1977.

4. Ionkin P.A., Maximovich N.G., Mironov V.G. etc. - Synthesis of linear electrical and electronic circuits (method of a state space). Lvov: Visha school, 1982.

5. Mironov V.G., Tchobanou M.K. Problems of synthesis of multi-dimensional digital filters. Trans. of 1st International conference " Digital signal processing and its applications", DSPA'1998, Moscow, 1998, pages 7-11.