

Московский энергетический институт (технический университет)
 Москва, ул. Красноказарменная, 13, Кафедра Электрофизики
 e-mail: tmk@vvk2.mpei.ac.ru, тел.: (095)362-7463

Аннотация. Рассматривается задача синтеза многомерных банков фильтров с предписанными свойствами. Наиболее важные требования это свойство точного воспроизведения сигнала, линейная фаза, максимальная гладкость частотных характеристик на границе полос пропускания и др. Представлен обзор различных подходов к проблеме синтеза банков фильтров. Наиболее перспективными являются полиномиальные методы, которые позволяют находить результат непосредственно в аналитической форме.

1 Постановка задачи

Последние годы все больше внимания уделяется **многомерным** (M-D) цифровым фильтрам. Это мотивируется всевозрастающим спросом на обработку и сжатие неподвижных изображений (двумерных 2-D) и видео (трехмерных 3-D) сигналов в технологиях мультимедиа, в телекоммуникациях и в других приложениях (обработка медицинских и сейсмических сигналов, ТВЧ, цифровые кодеки и др.).

Применение банков фильтров (filter banks - FB) при сжатии данных рассматривается как эффективная схема кодирования в системах передачи аудио и видео сигналов [3]. FB составлены из банков синтеза и анализа. Банк анализа раскладывает сигнал на различные пространственные частотные поддиапазоны, а банк синтеза восстанавливает исходный сигнал из сигналов поддиапазонов.

Если восстановленный сигнал идентичен первоначальному (с точностью до задержки и масштабного множителя), то такая система анализа/синтеза обладает свойством **точного восстановления** сигнала (perfect reconstruction - PR).

Линейность фазы (linear phase - LP) - желательное качество во многих приложениях с FB по многим причинам. Фильтры с линейной фазой приводят к нулевому фазовому искажению. Замечено также, что человеческая визуальная система является более терпимой к симметричным искажениям, чем к асимметричным.

Следовательно LP и PR свойства FB весьма существенны для кодирования сигналов.

Нерекурсивные фильтры (с конечной импульсной характеристикой) и для банка анализа, и для банка синтеза, являются предпочтительными, так как они имеют большее количество степеней свободы при той же длине импульсных передаточных функций и стабильность для таких системы всегда гарантирована.

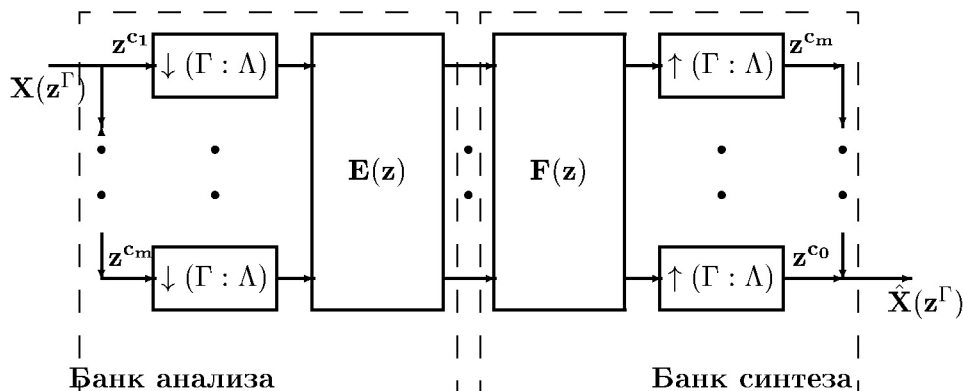
Неразделимые (неприводимые) решетки и банки фильтров являются также предпочтительными, т.к. M-D сигналы являются в общем случае неразделимыми; M-D FB в среднем обладают лучшими характеристиками; они обладают большим числом степеней свободы (больше ограничений могут быть удовлетворены); лучше адаптированы к человеческой зрительной системе; энергия сосредоточена в меньшем числе компонент; правда, их сложнее синтезировать.

Если подытожить, то основными требуемыми свойствами M-D FB являются:

- Это фильтры с конечной импульсной характеристикой
- Свойство точного воспроизведения сигнала
- Свойство линейной фазы
- Неразделимость M-D решеток и характеристик FB
- Максимальная гладкость частотных характеристик

2 Основные соотношения

Основные соотношения приведены в работах [5, 6]. На рис. приведена эффективная реализация, основанная на полифазном представлении.



Эффективная полифазная реализация

Прикладные методы синтеза

В настоящее время известны следующие методы синтеза M-D FB:

- **Структурные методы** - основаны на оптимизации каскадных схем [2];
- **Представления в пространстве состояний** - основаны на факторизации переходных матриц [8];
- **Оптимизационные методы** - основаны на оптимизации коэффициентов фильтра (относительно некоторого критерия качества) [1];
- **Преобразования переменных** - основаны на преобразовании МакКлеллана [2, 4];
- **Полиномиальные методы**.

Полиномиальные методы. Полиномы Бернштейна

Это метод **прямого** аналитического синтеза банков фильтров со свойствами **PR, LP, неразделимых и с заданной степенью гладкости** [6, 5].

В основе полиномиальных методов лежит применение полиномов Бернштейна

$$b_{i,j}^K(x,y) = \binom{K}{i} \binom{K}{j} \cdot x^i \cdot (1-x)^{K-i} \cdot y^j \cdot (1-y)^{K-j},$$

а также некоторых методов из алгебраической геометрии. При этом z-преобразование низкочастотного фильтра имеет вид:

$$E_0(z_1, z_2) = \frac{1}{2^{4N}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N g_{i,j} (-1)^{i+j} (1-z_1^{-1})^{2i} (1+z_1^{-1})^{2(N-i)} (1-z_2^{-1})^{2j} (1+z_2^{-1})^{2(N-j)}.$$

На рис.2 представлены характеристики НЧФ и ВЧФ.

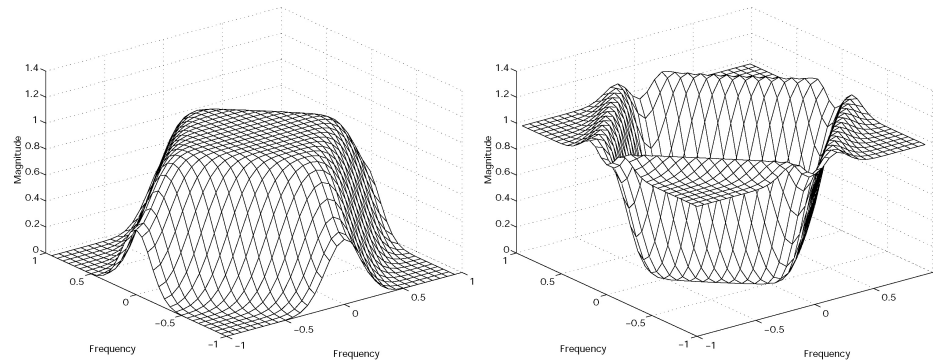


Рис. 2: НЧФ и ВЧФ (N=8).

Список литературы

[1] M. Ikehara and T. Nguyen. On 2-D perfect reconstruction linear phase filter banks. In *Proc. Asilomar Conf. on Sign., Syst. and Comp.*, pages 721-725, 1998.

[2] J. Kovacevic and M. Vetterli. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n . *IEEE Trans. Inform. Th., special issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis*, 38 (2): 533-555, March 1992.

[3] T.A. Ramstad, S.O. Aase, and J.H. Husoy. *Subband Compression of Images - Principles and Examples*. ELSEVIER Science Publishers BV, North Holland, 1995.

[4] D. Tay and N. Kingsbury. Design of nonseparable 3-D filter banks/wavelet bases using transformations of variables. *IEE Proc. Vis. Image Sign. Proc.*, 143 (1): 51-61, February 1996.

[5] M. Tchobanou. Polynomial methods for multi-dimensional filter banks' design. In *Proc. X European Signal Processing Conference EUSIPCO-2000*, Tampere, Finland, 2000.

[6] M. Tchobanou and V. Mironov. Design of multi-dimensional filter banks. In *Proc. The Second Inter-national Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000*, pages 183-188, Zielona Gora, Poland, 2000.

[7] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.

[8] S. Venkataraman and B. Levy. State space representations of 2-D FIR lossless matrices. *IEEE Trans. Circ., Syst. II: Analog and Digital Signal Processing*, 41(2):117-131, February 1994.

DESIGN OF MULTI-DIMENSIONAL FILTER BANKS BY USING OF BERNSTEIN POLYNOMIALS

Tchobanou M.K.

Moscow Power Engineering Institute (Technical University)
Department of Electrical Physics
13 Krasnokazarmennaya st., 105835, Moscow, RUSSIA
E-mail: tmk@vvk2.mpei.ac.ru, Tel.: +7(095)362-7463

Abstract. The problem of the design of multi-dimensional filter banks with prescribed properties is considered. The most important requirements are perfect reconstruction property, linear phase property, maximum number of vanishing moments and others. A survey of different approaches to the problem of filter banks' design is presented. The most promising ones are polynomial approaches that allow finding the result directly in analytical form.

Introduction.

In recent years, increasingly more attention is being paid to **multi-dimensional (M-D) digital filters**. This is motivated by the growing demand for *processing* and *compression* of still two-dimensional (2-D) images and video (3-D) signals in *telecommunications* and *multimedia technology*. Another areas of application of M-D digital filters are: *medical image processing, seismic signal processing, high-definition TV (HDTV), scanning rate converters, PAL decoders and digital video codecs*, *exploiting of M-D digital filtering methods for the solution of partial differential equations (PDE), which describe a wide variety of physical systems*.

The application of **filter banks (FB)** to *data compression*, which is known as **subband coding**, has been studied as an effective coding scheme in audio and visual communications [3]. FBs are composed of both analysis and synthesis banks. The analysis bank decomposes a signal into different frequency subbands, and the synthesis bank reconstructs the original signal from the subband signals. If the reconstructed signal is identical to the original one, except for delay and scaling, then the analysis/synthesis system is said to be a **perfect reconstruction (PR) FB**.

Linear phase (LP) is also a desired quality in many applications of multirate FBs.

Finite impulse response (FIR) analysis and synthesis filters are usually employed in the design of PR FB, since they have more *degrees of freedom* for same length of impulse responses and since *stability* for such system is always guaranteed.

Fundamental Relations.

The main relations are given in [5, 6, 7].

Applied Design Methods.

Structural Methods. The design is based on optimizing the cascade filter structures, which ensure design constraints (like orthogonality, LP or regularity) structurally [2]. No complete cascade has been available in the M-D case due to the lack of a factorization theorem.

State-Space Representation. Another major design technique for M-D FBs is applying of the state-space representations. Unfortunately, the set of transfer matrices, which can be factored in cascade form, represents only a subset inside the complete class of such matrices.

Optimization Methods. The design is based on optimizing the filters' coefficients (with respect to some performance index) under the constraints of orthogonality (or other properties) [1]. This solution is an approximation of the exact result and has several disadvantages.

Transformation of Variables. There are various techniques proposed by different researchers (see [4]) that are related to the McClellan transformation. Transformation-based designs have the disadvantage that the shape of the frequency response of the filters is determined uniquely from the subsampling matrix.

Bernstein Polynomials.

Taking advantage of the multivariate polynomials (like Bernstein polynomials or other types) allows obtaining filters with maximum number of vanishing moments and with other good properties [6, 5]. In this case it was found the analysis filter [5]

$$E_0(z_1, z_2) = \frac{1}{2^{4N}} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N g_{i,j} (-1)^{i+j} (1 - z_1^{-1})^{2i} (1 + z_1^{-1})^{2(N-i)} (1 - z_2^{-1})^{2j} (1 + z_2^{-1})^{2(N-j)} .$$

References

- [1] M. Ikehara and T. Nguyen. On 2-D perfect reconstruction linear phase filter banks. In *Proc. Asilomar Conf. on Sign., Syst. and Comp.*, pages 721-725, 1998.
- [2] J. Kovacevic and M. Vetterli. Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n . *IEEE Trans. Inform. Th., special issue on Wavelet Transforms and Multiresolution Signal Analysis*, 38(2):533-555, March 1992.
- [3] T.A. Ramstad, S.O. Aase, and J.H. Husoy. *Subband Compression of Images - Principles and Examples*. ELSEVIER Science Publishers BV, North Holland, 1995.
- [4] D. Tay and N. Kingsbury. Design of nonseparable 3-D filter banks/wavelet bases using transformations of variables. *IEE Proc. Vis. Image Sign. Proc.*, 143(1):51-61, February 1996.
- [5] M. Tchobanou. Polynomial methods for multi-dimensional filter banks' design. In *Proc. X European Signal Processing Conference EUSIPCO-2000*, Tampere, Finland, 2000.
- [6] M. Tchobanou and V. Mironov. Design of multi-dimensional filter banks. In *Proc. The Second International Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000*, pages 183-188, Zielona Gora, Poland, 2000.
- [7] P. P. Vaidyanathan. *Multirate Systems and Filter Banks*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1993.