СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ТИПА ПАДЕ

*Вавилов В.В, **Чобану М.К.

* Московский государственный университет
Механико-математический факультет
Воробьевы горы, МГУ, 119899, Москва

** Московский энергетический институт (технический университет)
Кафедра Электрофизики
ул. Красноказарменная, 13, 105835, Москва

Аннотация. Показано, как распространить результаты, полученные в классической 1-D рациональной аппроксимации, на рациональную аппроксимацию многомерных функций (M-D). Выбор определяющего (интерполирующего) множества **I(n, m)** позволяет решить проблему получения передаточной функции M-D цифровой системы, которая задана своим представлением в пространстве состояний.

Введение

За последнее время существенно возрос интерес к решению широкого класса проблем для многомерных (multi-dimensional - M-D) систем, которые могут быть описаны рациональными функциями (или матрицами) от нескольких комплексных переменных. Рациональная теория аппроксимации нашла много интерпретаций и различные приложения в теории систем и обработке сигналов. Они включают синтез цифровых фильтров по заданной импульсной передаточной функции [3], моделируют приведение систем управления[6], синтеза цепей и проблему минимальной частичной реализации. В течение последних десятилетий группа математиков исследовала проблему приближения M-D функций ([1], [4], [5]). Метод аппроксимации типа Паде для одномерных функций был распространен на аппроксимацию функций двух- (или большего числа) переменных.

Описание системы

При рациональном моделировании M-D систем, система может быть смоделирована в соответствии с ее описанием в пространстве состояний. В этом случае двумерная z-преобразование может дать передаточную матрицу системы

$$\mathbf{H}(z_1, z_2) = \mathbf{C}\left(\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}.$$

Главная цель работы состоит в том, чтобы разработать метод для вычисления H($z1;$ $z2$), используя рациональную аппроксимацию.

M-D аппроксиманты типа Паде.

H($z1$, $z2$) задан двумерным рядом Тэйлора и равен

$$\mathbf{H}(z_1, z_2) = \frac{\mathbf{W}(z_1, z_2)}{\mathbf{Q}(z_1, z_2)} = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} h_{i,j} z_1^i z_2^j, \mathbf{Q}(0,0) = 1,$$

где W($z1$, $z2$) это целая функция, Q($z1$, $z2$) это 2-D многочлен.

Обобщенный аппроксимант Паде (Чисхолм [4], Вавилов [5]) H($z1$, $z2$) для заданных **n = (*n*1*;* *n*2)** и **m = (*m*1*;* *m*2)** определяется как рациональная функция, которая принадлежит классу

$$\mathcal{R}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \left\{ \mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{q}},\ \mathbf{p}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} p_{i,j} z_1^i z_2^j, \mathbf{q}(z_1, z_2) = \sum_{k=0}^{m_1}\sum_{p=0}^{m_2} q_{k,p} z_1^k z_2^p,\ \mathbf{q}(0,0) = 1 \right\},$$

(для случая двух переменных), так, что

$$\mathbf{H}(z_1, z_2)\left[\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{p=0}^{m_2} q_{k,p} z_1^k z_2^p\right] - \left[\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} p_{i,j} z_1^i z_2^j\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j} z_1^i z_2^j,$$

$$\tau_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = (n_1+1)(n_2+1) + (m_1+1)(m_2+1) - 1.$$

где v($i;$ j=0 для ($i;$ j)∈ I(n*;* m). Размерность определяющего множества I(n*;* m) равна

Число неизвестных коэффициентов рациональной функции **r** совпадает с размерностью определяющего множества.

Одной из важнейших задач в M-D рациональной аппроксимации является выбор интерполирующего (определяющего) множества I(n,m). В различных публикациях неправильный выбор этого множества приводил к неправильным заключениям относительно существования или неединственности двумерной Паде аппроксимации [2], [3].

Новые результаты, полученные Вавиловым [5], позволяют сделать правильный выбор множества I(n,m) [7]. Основные свойства определяющего множества:

1. *dim*I(n; m) = τn;m;

2. ($n1$ + $m1$; 0), (0; $n2$ + $m2$) ∈ I(n; m) (это гарантия того, что при $z1$ = 0 (или $z2$ = 0) будет получена классическая 1-D рациональная аппроксимация типа Паде.);

3. n = ($n1$; $n2$) ∈ I(n; m); если ($k1$; $k2$) ∈ I(n; m) то [0; k] ⊂ I(n; m), где [0; k] = { (s; u) : 0 ≤ s ≤ $k1$; 0 ≤ u ≤ $k2$ } - правило прямоугольника.

В [5] приводятся единственные два случая определяющих множеств, для которых была доказана следующая Montessus de Ballore-type теорема.

Theorem ([5]) [Montessus de Ballore-type theorem.]

Если m = (m1; m2) фиксированно, то:

$$\mathbf{f}^j_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{p}^j_{\mathbf{n}}}{\mathbf{q}^j_{\mathbf{m}}};$$

для всех достаточно больших n = min(n1; n2) существует единственный аппроксимант Паде

2. для каждого из двух множеств Ij(n; m); j = 1; 2; последовательности f j n;m равномерно сходятся к функции H(z1; z2) внутри компактных подмножеств

$$\mathcal{G} = \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{q}_{\mathbf{m}} = 0\}$$

Пример

Рассмотрим двойной ряд из [3], который надо аппроксимировать с помощью рациональной функции, в которой максимальные степени по каждой их переменных в числителе и знаменателе равны 1:

$$\hat{\mathbf{H}}(z_1, z_2) = \frac{P_{00} + P_{10}z_1 + P_{01}z_2 + P_{11}z_1z_2}{1 + Q_{10}z_1 + Q_{01}z_2 + Q_{11}z_1z_2}.$$

Неправильный выбор определяющего множества I(n; m) в [3] привел к неверному выводу, что аппроксимация Паде неединственная. Тот выбор был основан на определяющем множестве I(n; m) = {(0; 0); (1; 0); (0; 1); (1; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 3)}.

Как указывалось, правильный выбор определяющего множества этоI1(n; m) или I2(n; m).

Если I1(n; m) выбран в качестве определяющего множества, то

(I1(n; m) = {(0; 0); (1; 0); (0; 1); (1; 1); (2; 0); (2; 1); (0; 3)}) и тогда были получены следующие уравнения для коэффициентов знаменателя:

$$\begin{aligned} &(2,0) \quad 0 = 2 + Q_{10} \\ &(2,1) \quad 0 = 1 - Q_{10} + 2Q_{01} + Q_{11} \\ &(0,3) \quad 0 = 3 + Q_{01}. \end{aligned}$$

Тогда коэффициенты будут равны

$Q10$ = -2

$Q01$ = -3

$Q11$ = 3:

Коэффициенты числителя можно получить после подстановки оставшихся точек определяющего множества I1(n; m):

$$
\begin{array}{ll}
(0,0) & P_{00} = 1 \\
(1,0) & P_{10} = 1 + Q_{10} \\
(0,1) & P_{01} = 1 + Q_{01} \\
(1,1) & P_{11} = -1 + Q_{10} + Q_{01} + Q_{11}.
\end{array}
$$

Окончательный результат для 2-D аппроксиманта Паде будет

$$\hat{\mathbf{H}}(z_1, z_2) = \frac{1 - z_1 - 2z_2 - 3z_1 z_2}{1 - 2z_1 - 3z_2 + 3z_1 z_2}.$$

Список литературы

[1] G. Baker and P. Graves-Morris. Pade approximants. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.

[2] N. Bose. Multidimensional systems theory, chapter Multivariate rational approximants of the Pade-Type in systems theory . D. Reidel Publ. Comp., 1985.

[3] N. Bose and S. Basu. Two-dimensional matrix Pade approximants: existence, nonuniqueness, and recursive computation. IEEE Trans. Autom. Contr., 25(1):509-514, February 1980.

[4] J. Chisholm. Rational approximants defined from double power series. Math. Comp., 27:841-848, 1973.

[5] A. Gonchar and V. Vavilov. Rational approximations of functions of several complex variables. Journ. of Approx. Theory, 1999. to appear.

[6] A. Sahani and S. Nagar. Design of digital controllers for multivariable systems via time-moments matching. Computers & Electrical Engineering, 24(4):335-347, 1998.

[7] V. Vavilov and M. Tchobanou. Multi-dimensional rational approximants of the Pade-type in transfer function computing. In Proc. The Second International Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000, pages 209-212, Zielona Gora, Poland, 2000.

DESIGN OF MULTI-DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS THROUGH RATIONAL APPROXIMANTS OF THE PADE TYPE

*Vavilov V.V., ** Tchobanou M. K.

* Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics
Vorobievy gory, MSU, 119899, Moscow, RUSSIA
** Moscow Power Engineering Institute (Technical University),
Dep-t of Electrical Physics
13 Krasnokazarmennaya st., 105835, Moscow, RUSSIA

Abstract. This paper shows how to extend the results obtained in classical 1-D rational approximation for rational approximation of M-D functions. The choice of the determinative (interpolation) set **I(n, m)** allows to handle the problem of deriving the transfer function of a M-D digital system, that is described by its state-space representation.

Introduction.

Recently there has been a great deal of interest shown in the analysis and synthesis of a broad class of problems in multi-dimensional (M-D) systems, which may be characterized by rational functions (or matrices) in several complex variables.

Rational approximation theory has found many interpretations and different applications in signal processing and systems theory. They include the design of digital filters from a prescribed impulse response sequence [3], model reduction of control systems [6], network synthesis and minimal partial realization problem.

During the last decades a group of mathematicians have been researching the problem of approximating M-D functions ([1], [4], [5]). The method of Pade approximation for single-variable functions was extended to the approximation of two (or more) variable functions.

System description.

In the rational modeling of M-D systems, the system may be modeled by its state-space description. In this case the 2-D z-transform may give that the transfer matrix of the system is

The main goal of the paper is to develop a method for computing H($z1;$ $z2$) by using the rational

$$\mathbf{H}(z_1, z_2) = \mathbf{C}(\begin{bmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{bmatrix} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

approximation.

M-D Pade-type approximants.

H($z1;$ $z2$) is known by its 2-D power series and may be represented

$$\mathbf{H}(z_1, z_2) = \frac{\mathbf{W}(z_1, z_2)}{\mathbf{Q}(z_1, z_2)}$$

Q(0; 0) = 1, where W($z1;$ $z2$) is an entire function, Q($z1;$ $z2$) is a 2-D polynomial.

The generalized Pade approximant (Chisholm [4], Vavilov [5]) of H($z1;$ $z2$) for given n = ($n1;$ $n2$) and m = ($m1;$ $m2$) is defined as the *rational function* which, for two variables, belongs to the class

so that

$$\mathbf{H}(z_1, z_2) \left[\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{p=0}^{m_2} q_{k,p} z_1^k z_2^p\right] - \left[\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} p_{i,j} z_1^i z_2^j\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j} z_1^i z_2^j, \text{ with } v(i,j) \equiv 0 \text{ when } (i,j) \in \mathbf{I}(\mathbf{n}, \mathbf{m}).$$

The dimension of the determinative set I(n; m) is τn;m = ($n1$+1)($n2$+1)+($m1$+1)($m2$+1) - 1.

The same is the number of unknown coefficients of the rational function **r** to be determined.

One of the most important problems in M-D rational approximation is the choice of the determinative (interpolation) set I(n,m). In different publications the improper choice of this set gave raise to wrong conclusions about nonexistence or nonuniqueness of 2-D Pade approximants [2], [3].The new results obtained recently by Vavilov [5] allow one to make the right choice of the set I(n,m) [7].

Its most significant features are:

$$dim\mathbf{I}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \tau_{\mathbf{n},\mathbf{m}};\ (n_1+m_1, 0), (0, n_2+m_2) \in \mathbf{I}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$$

(it guarantees that in case when $z1$ = 0 (or $z2$ = 0) one would have the classical 1-D rational approximation of Pade type.); n = ($n1;$ $n2$)∈ I(n; m); if ($k1;$ $k2$) ∈I(n; m) then [0; k]⊂ I(n; m),

where [0; k] = f ($s;$ u) : 0 ≤ s ≤ $k1;$ 0 ≤u ≤$k2$} - the "rectangle" rule.

In [5] the only two possible choices were given for which it was proved the next Montessus de Ballore-type theorem, which states that if m = ($m1; m2$) is fixed, then for all n= $min(n1; n2)$ that are enough big, there exists only one Pade approximant

$$\mathbf{f}^j_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{p}^j_{\mathbf{n}}}{\mathbf{q}^j_{\mathbf{m}}}$$

for each of the sets Ij (n; m); j = 1; 2; the sequences f j n;m converge uniformly to the function H(z1; z2) inside the compact subsets of

$$\mathcal{G} = \mathbb{C}^2 \setminus \{\mathbf{q}_{\mathbf{m}} = 0\}.$$

An example.

Consider the double power series from [3], which is required to be approximated by a rational function, where the degrees in each variable in the numerator and denominator polynomials are set to 1:

$$\mathbf{H}(z_1, z_2) = 1 + z_1 + z_2 + 2z_1^2 + 3z_2^2 - z_1 z_2 + z_1^2 z_2 - z_1^2 z_2^2 + z_1 z_2^3 - z_1^3 z_2^2 + 2z_1^2 z_2^3 + ...$$

$$\hat{\mathbf{H}}(z_1, z_2) = \frac{P_{00} + P_{10}z_1 + P_{01}z_2 + P_{11}z_1 z_2}{1 + Q_{10}z_1 + Q_{01}z_2 + Q_{11}z_1 z_2}.$$

The inaccurate choice of the determinative set I(n; m) leads to erroneous statement that the Pade approximation is nonunique. That choice was based on the incorrect determinative set

I(n; m) = { (0; 0); (1; 0); (0; 1); (1; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 3)} . If I1(n; m) was chosen as a determinative set (I1(n; m) = { (0; 0); (1; 0); (0; 1); (1; 1); (2; 0); (2; 1); (0; 3)}) then one get the next equations for the denominator's coefficients: 0 = 2+$Q$10, 0 =1- $Q$10 +2Q01 +$Q$11, 0 = 3+Q01. Then the coefficients will be $Q$10 = -2; Q01 =-3; $Q$11 = 3. The numerator's coefficients may be found after substituting for the rest of the points from the determinative set I1(n; m) and the final result for the 2-D Pade approximant will be

$$\hat{\mathbf{H}}(z_1, z_2) = \frac{1 - z_1 - 2z_2 - 3z_1 z_2}{1 - 2z_1 - 3z_2 + 3z_1 z_2}.$$

References

[1] G. Baker and P. Graves-Morris. *Pade approximants*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.

[2] N. Bose. *Multidimensional systems theory*, chapter *Multivariate rational approximants of the Pade-Type in systems theory* . D. Reidel Publ. Comp., 1985.

[3] N. Bose and S. Basu. Two-dimensional matrix Pade approximants: existence, nonuniqueness, and recursive computation. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 25(1):509–514, February 1980.

[4] J. Chisholm. Rational approximants defined from double power series. *Math. Comp.*, 27:841–848, 1973.

[5] A. Gonchar and V. Vavilov. Rational approximations of functions of several complex variables. *Journ. of Approx. Theory*, 1999. to appear.

[6] A. Sahani and S. Nagar. Design of digital controllers for multivariable systems via time-moments matching. *Computers & Electrical Engineering*, 24(4):335–347, 1998.

[7] V. Vavilov and M. Tchobanou. Multi-dimensional rational approximants of the Pade-type in transfer function computing. In *Proc. The Second International Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000*, pages 209–212, Zielona Grora, Poland, 2000.