ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДОК МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕКТРАЛЬНЫХ СТАТИСТИК

Абрамович М.С., Михадюк А.В., Харин Ю.С.

Белорусский государственный университет,
220050, Минск, пр. Фр.Скорины 4, кафедра математического моделирования и анализа данных

Для обнаружения разладок многомерных сигналов широко используются параметрические методы, основанные на модели авторегрессии и скользящего среднего [1], [2]. Эти методы требуют существенной априорной информации о параметрической модели, описывающей сигнал. Предлагаемый подход обнаружения разладок многомерных сигналов с использованием непараметрических спектральных статистик второго порядка требует меньше априорной информации о модели анализируемого сигнала и обеспечивает точность, сравнимую с параметрическими методами.

Пусть $X_1(t)$, $X_2(t)$ — два стационарных в широком смысле p–мерных сигнала: $X_i(t) = (X_{i1}(t), \dots, X_{ip}(t))^T$, $X_{ij}(t)$ — значение j–ой компоненты i–го сигнала в момент времени $t \in Z$ $\left(i = 1,2,\ j = \overline{1,p}\right)$. Определим ковариационную матрицу многомерного сигнала:

$$\mathbf{c_i(u) = cov\,(X_i(t + u), X_i(t)) = E\{(X_i(t + u) - \mu_i)(X_i(t) - \mu_i)^T\}}, \tag{1}$$

где $\mu_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{ip})^T = E\{X_i(t)\}$ — среднее значение сигнала $X_i(t)$, $u \in Z$, $c_{ikl}(u)$— элемент матрицы $c_i(u)$, соответствующий k-ой строке и l–му столбцу, ($c_{ikl}(u)$ является взаимной ковариационной функцией сигналов $X_{ik}(t)$ и $X_{il}(t)$ при $k,l \in \{1,2,\dots,p\}$, $k \neq l$, при $k = l$ $c_{ikk}(u)$ — автоковариационная функция сигнала $X_{ik}(t)$).

Предполагая, что $\sum\limits_{u=-\infty}^{\infty} \left|c_{ikl}(u)\right| < \infty$ для k,l = 1,…,p, покомпонентно определим (p×p)-матрицу спектральной плотности $S_i(\lambda) = (S_{ikl}(\lambda))$:

$$S_{ikl}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=-\infty}^{\infty} \exp(-i^* \lambda u) c_{ikl}(u), \tag{2}$$

где i^* — мнимая единица, $\lambda \in [-\pi,\pi]$ — частота.

Элемент матрицы $S_{ikl}(\lambda) = S^R_{ikl}(\lambda) + i^* \cdot S^I_{ikl}(\lambda)$ спектральной плотности является спектральной плотностью сигнала $X_{il}(t)$, если k=l, и взаимной спектральной плотностью сигналов $X_{ik}(t)$ и $X_{i1}(t)$, если $k \neq l$. Матрицы спектральных плотностей $S_1(\lambda) = (S_{1kl}(\lambda))$ и $S_2(\lambda) = (S_{2kl}(\lambda))$ различны и неизвестны.

Сигнал $X = \{x_t: t = 1,\dots,T\}$ длительностью T имеет разладку в неизвестный момент времени $t_0 \in \{\tau_-, \dots, \tau_+, T+1\}$, где $1 < \tau_- < \tau_+ < T$ — некоторые априорно заданные граничные значения и составлен из фрагментов сигналов $X_1(t)$, $X_2(t)$:

$$X(t) = \begin{cases} X_1(t), 1 \le t \le t_0 - 1, \\ X_2(t), \qquad t \ge t_0. \end{cases} \tag{3}$$

Разладка сигнала X(t), t = 1,…,T в момент времени t_0 порождается изменением матрицы спектральной плотности. Если $t_0 = T+1$, то $X(t) = X_1(t)$, t = 1,…,T — однородный сигнал, то есть в наблюдаемом сигнале разладка отсутствует.

Определим гипотезу $H_{1\tau}$: $t_0 = \tau$, означающую, что наблюдаемый сигнал имеет разладку в момент τ, и гипотезу H_0: $t_0 = T+1$, означающую, что наблюдаемый сигнал — однородный.

Для произвольного момента времени $\tau \in \{\tau_-, \dots, \tau_+\}$, относительно которого проверяются гипотезы, осуществим разбиение наблюдаемого сигнала X на два фрагмента $X_1 = (x_1,\dots,x_{\tau-1})$, $X_2 = (x_\tau,\dots,x_T)$, с длинами T_1 и T_2 соответственно: $T_1 = \tau-1$, $T_2 = T-\tau+1$, $T_1+T_2 = T$, $T_0 = 0$.

Определим непараметрическую статистическую оценку матрицы спектральной плотности для частоты $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\lambda \neq 0$ по фрагменту X_i (i = 1,2) в виде:

$$\hat{S}_i(\lambda_s) = \left(\hat{S}_{ikl}(\lambda)\right), \quad k,l = \overline{1,p}, \tag{4}$$

$\hat{S}_{ikl}(\lambda) = \dfrac{2\pi}{T_i} \sum\limits_{n=1}^{T_i-1} W^{(T_i)}\left(\lambda_s - \dfrac{2\pi n}{T_i}\right) \hat{I}^{(T_i)}_{ikl}\left(\dfrac{2\pi n}{T_i}\right)$ — периодограммная состоятельная оценка спектральной плотности $S_{ikl}(\lambda)$ [3], где $W^{(T_i)}(\alpha) = K_{T_i} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} W\left(K_{T_i}(\alpha + 2\pi j)\right)$, $W(\alpha)$, $-\infty < \alpha < +\infty$ — весовая функция, удовлетворяющая соотношениям $\int\limits_{-\infty}^{\infty} W(\alpha)\, d\alpha = 1, \quad W(-\alpha) = W(\alpha)$;

$\hat{I}^{(T_i)}_{ikl}(\lambda_s) = \dfrac{1}{2\pi T_i} d^{(T_i)}_{ik}(\lambda_s)\, \overline{d^{(T_i)}_{il}(\lambda_s)}$ — периодограмма второго порядка;

$d_{ik}^{(T_i)}(\lambda_s)=\sum\limits_{t=T_{i-1}+1}^{T_{i-1}+T_i} X_{ij}(t)\exp\left(-i^*\lambda_s t\right)$ — преобразование Фурье сигнала $X_{ij}(t)$, $j = 1,\ldots,p$;

K_{T_i} — параметр сглаживания.

Для обнаружения момента разладки многомерного сигнала построим следующую статистику различия выборочных оценок спектральных плотностей (коэффициент статистического различия матриц спектральных плотностей):

$$\hat{U}^2(\tau)=\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left|\hat{S}_{1kl}(\lambda_s)-\hat{S}_{2kl}(\lambda_s)\right|^2}{\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left(\left|\hat{S}_{1kl}(\lambda_s)\right|^2+\left|\hat{S}_{2kl}(\lambda_s)\right|^2\right)}, \tag{5}$$

где m — число частот $\lambda_1,\ldots,\lambda_m \in [-\pi, \pi]$, для которых вычисляются оценки, причем $\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left|S_{1kl}(\lambda_s)-S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2>0$.

Если имеет место асимптотика $K_{T_i}\to\infty$, $\frac{K_{T_i}}{T_i}\to 0$ при $T_i\to\infty$, то для $\tau = t_0$ статистика (5) является состоятельной оценкой функционала

$$U^2(\tau)=\frac{\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left|S_{1kl}(\lambda_s)-S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2}{\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left(\left|S_{1kl}(\lambda_s)\right|^2+\left|S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2\right)}. \tag{6}$$

В [4] доказано, что функционал (6) достигает максимального значения в момент разладки.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия (i = 1,2):

C1) Сходится ряд: $\sum\limits_{u=-\infty}^{\infty}|u|\,\left|c_{ikl}(u)\right|<\infty$;

C2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\alpha|\,|W(\alpha)|d\alpha<\infty$;

C3) Имеет место асимптотика: $T_i\to\infty$, $K_{T_i}\to\infty$, $\frac{K_{T_i}}{T_i}\to 0$, $m=O\left(T^{1-\gamma}\right)$, $0<\gamma<1$, $m\to\infty$;

C4) Длины фрагментов сравнимы в асимптотике C3: $\frac{T_i}{T}\to g_i$, $0<g_i<1$.

Тогда при выполнении гипотезы H_0 статистика

$$G=\left(\sum\limits_{s=1}^{m}\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left(\left|S_{1kl}(\lambda_s)\right|^2+\left|S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2\right)\hat{U}^2(t_0)-A_m\right)\Big/B_m,\quad A_m=\sum\limits_{s=1}^{m}a_s,\ B_m=\sqrt{\sum\limits_{s=1}^{m}b_s}$$

имеет асимптотически нормальное распределение $N(0,1)$, где:

$$a_s=2\pi Q\left(\frac{K_{T_1}}{T_1}+\frac{K_{T_2}}{T_2}\right)\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left|S_{1kl}(\lambda_s)\right|^2+o\left(\frac{K_{T_1}}{T_1}+\frac{K_{T_2}}{T_2}\right)+O\left(\frac{1}{K_{T_1}^2}+\frac{1}{K_{T_2}^2}\right),$$

$$b_s=8\pi^2 Q^2\left(\frac{K_{T_1}}{T_1}+\frac{K_{T_2}}{T_2}\right)^2\left(\sum\limits_{k,l=1}^{p}\left|S_{1kl}(\lambda_s)\right|^2\right)^2+o\left(\frac{K_{T_1}^2}{T_1^2}+\frac{K_{T_2}^2}{T_2^2}\right)+O\left(\frac{1}{K_{T_1}^4}+\frac{1}{K_{T_2}^4}\right),$$

$Q=\int\limits_{-\infty}^{\infty}W^2(\alpha)d\alpha$, $W(\alpha)$ — весовая функция.

На основании теоремы 1 построим следующий критерий обнаружения момента разладки многомерного сигнала:

принимается гипотеза $\begin{cases} H_0, \text{ если } \hat{U}^2(\tau) < \delta_\varepsilon, \\ H_{1\tau}, \text{ если } \hat{U}^2(\tau) \ge \delta_\varepsilon, \end{cases}$ $\delta_\varepsilon = \pi\left(\frac{K_{T_1}}{T_1} + \frac{K_{T_2}}{T_2}\right)\left(\sqrt{2}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+1\right)Q$,(7)

где $\Phi^{-1}(\alpha)$ — квантиль уровня α стандартного нормального распределения, ε — уровень значимости.

Для исследования мощности критерия обнаружения разладки (7), найдем асимптотическое распределение статистики $\hat{U}^2(\tau)$ при $T_2 \to \infty, \quad T_1 \to \infty$.

Теорема 2. Пусть выполняются условия С1-С4 теоремы 1 (i = 1,2), тогда при $\tau = t_0$ и выполнении гипотезы $H_{1\tau}$ статистика $\hat{U}_1^2(\tau)$ распределена асимптотически нормально:

$$L\left\{\frac{\hat{U}^2(t_0) - a(T_1, T_2)}{\sqrt{B(T_1, T_2)}}\right\} \xrightarrow{D} N(0,1),$$

где

$$a(T_1,T_2) = \frac{\sum_{s=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p}\left|S_{1kl}(\lambda_s) - S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2}{\sum_{s=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p}\left(\left|S_{1kl}(\lambda_s)\right|^2 + \left|S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2\right)}, \qquad B(T_1,T_2) = \sum_{s=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p} B_{kl}(\lambda_s),$$

$$B_{kl}(\lambda_s) = \frac{8\pi Q}{F^2}\left(\frac{K_{T_1}}{T_1}\left(\left(S_{1kl}^R(\lambda_s)\right)^2 - \left(S_{1kl}^I(\lambda_s)\right)^2 - S_{1kl}^R(\lambda_s)S_{2kl}^R(\lambda_s) + S_{1kl}^I(\lambda_s)S_{2kl}^I(\lambda_s)\right)^2 + \right.$$

$$\left.\frac{K_{T_2}}{T_2}\left(\left(S_{2kl}^R(\lambda_s)\right)^2 - \left(S_{2kl}^I(\lambda_s)\right)^2 - S_{1kl}^R(\lambda_s)S_{2kl}^R(\lambda_s) + S_{1kl}^I(\lambda_s)S_{2kl}^I(\lambda_s)\right)^2\right),$$

$$F = \sum_{s=1}^{m}\sum_{k,l=1}^{p}\left(\left|S_{1kl}(\lambda_s)\right|^2 + \left|S_{2kl}(\lambda_s)\right|^2\right).$$

Следствие. Справедлива следующая аппроксимация мощности критерия (7):

$$\omega = P_{H_{1t_0}}\left\{\hat{U}^2(t_0) > \delta_\varepsilon\right\} \approx 1 - \Phi\left(\frac{\delta_\varepsilon - a(T_1,T_2)}{\sqrt{B(T_1,T_2)}}\right),$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция стандартного нормального распределения.

Построим алгоритм, который использует подход «скользящих окон» и основан на критерии (7). При этом подходе предполагается, что в произвольный момент времени τ=d+1,...,T–d+1 вывод о наличии разладки делается по выборке $x_{\tau-d}, \ldots, x_\tau, \ldots, x_{\tau-d+1}$ («скользящее окно») фиксированной длины N = 2d (d — параметр).

Идея алгоритма обнаружения разладки сигнала состоит в последовательном перемещении «скользящего окна» по временному ряду, описывающему сигнал, на определенную величину, вычислении статистики $\hat{U}^2(\tau)$, определении ее локальных максимумов и сравнении их с пороговым значением. Ниже приводится описание шагов этого алгоритма.

Шаг 0. Задается длина «скользящего окна» N, число частот m, параметр сглаживания K_T, величина сдвига по временному ряду k, точность обнаружения моментов разладки ε_0.

Шаг 1. Вычисляются матрицы оценок спектральных плотностей $\hat{S}_1(\lambda_s)$, $\hat{S}_2(\lambda_s)$, s = 1,…,m по первой и второй половинам «скользящего окна», и на их основании — статистика $\hat{U}^2(\tau)$.

Шаг 2. Производится смещение «скользящего окна» по временному ряду на величину сдвига k и, если «скользящее окно» не достигло конца ряда, то Шаг 1, иначе Шаг 3.

Шаг 3. Определяются локальные максимумы:

$$\hat{\tau} = \arg\max_{\tau \in \{\tau_-, \ldots, \tau_+\}} \hat{U}^2(\tau).$$

Если $\hat{U}^2(\hat{\tau}) > \delta_\varepsilon$, то значение $\hat{\tau}$ соответствует моменту разладки.

Шаг 4. Уточнение момента разладки. От найденного момента разладки осуществляется смещение «скользящего окна» на l = [k / 2] отсчетов назад и l отсчетов вперед и вычисляются статистики $\hat{U}^2(\tau - l)$ и $\hat{U}^2(\tau + l)$.

Уточненные значения момента удовлетворяют условию:

$$\hat{\tau}_1 = \arg\max_{\tau} \left\{ \hat{U}^2(\tau - 1), \hat{U}^2(\tau), \hat{U}^2(\tau + 1) \right\}, \quad \hat{\tau}_1 \in \{\tau - 1, \tau, \tau + 1\}.$$

Шаг 5. Если $l > \varepsilon_0$, то $k = k / 2$ и переход на Шаг 4, в противном случае вычисления завершаются.

Методом статистического моделирования для двумерных временных рядов, описываемых моделью авторегрессии первого порядка, проведен анализ эффективности критерия (7) в зависимости от параметра сглаживания K_T, числа частот m и длины «скользящего окна» N, что позволило определить их оптимальные значения, обеспечивающие минимум вероятности ошибки второго рода при фиксированной вероятности ошибки первого рода [5]. Показано также, что точность обнаружения момента разладки с использованием предложенного алгоритма сравнима с точностью параметрического алгоритма, основанного на модели авторегрессии.

Литература

1. Клигене Н.И., Телькснис Л.А. Методы определения моментов изменения свойств случайных процессов // Автоматика и телемеханика, 1983, №10, с.5-56.
2. Липейка А. Оценка моментов времени изменения свойств многомерных авторегрессионных последовательностей при неполностью известных параметрах // Статистические проблемы управления: Сб. ст., Вильнюс, 1990, вып. 89, с. 150-154.
3. Бриллинджер Д.Р. Временные ряды: обработка данных и теория, Москва, Мир, 1980.
4. Абрамович М.С. Критерий обнаружения спектральной «разладки» векторного временного ряда // Pattern Recognition and Information Processing :Proc. of Fourth Int. Conf. PRIP'97. Vol. 2, Minsk-Szczecin, 1997, p. 165-169.
5. Харин Ю.С., Абрамович М.С. Об обнаружении спектральной разладки двумерного временного ряда // Автометрия, 1999, №2, с.53-62.

DETECTION OF CHANGE-POINTS IN MULTIDIMENSIONAL SIGNALS USING SPECTRAL STATISTICS

Abramovich M.,Kharin Yu.,Mikhadziuk A.

Belarusian State University,

220050, Minsk, F.Scoriny 4, department of mathematical modeling and data analysis

Let X(t) be a p–dimensional signal of length T with a change-point at unknown time moment $t_0 \in \{\tau_-, \tau_- +1, \ldots, \tau_+\}$, where τ_-, τ_+ are some a priori given limit values:

$$X(t) = \begin{cases} X_1(t), 1 \le t \le t_0 - 1, \\ X_2(t), \qquad t \ge t_0, \end{cases}$$

where $X_i(t) = (X_{i1}(t), \ldots, X_{ip}(t))^T$ is a stationary signal, with unknown (p×p)-matrix of spectral density $S_i(\lambda) = (S_{ikl}(\lambda))$, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\left(i = 1,2;\, k,l = \overline{1,p} \right)$. Matrices $S_1(\lambda)$ and $S_2(\lambda)$ are different and unknown, i.e. the change-point of the signal is generated by changing of matrices of spectral density.

Let τ be fixed, H_0: t_0 = T+1 be a hypothesis on homogeneity of the observed signal and $H_{1\tau}$: $t_0 = \tau$ be the general alternative of presence of a change-point in the observed signal at the time moment τ. We have constructed the following statistic for detection of change-points:

$$\hat{U}^2(\tau) = \frac{\sum_{s=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{p} \left| \hat{S}_{1kl}(\lambda_s) - \hat{S}_{2kl}(\lambda_s) \right|^2}{\sum_{s=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{p} \left(\left| \hat{S}_{1kl}(\lambda_s) \right|^2 + \left| \hat{S}_{2kl}(\lambda_s) \right|^2 \right)}, \tag{1}$$

where $\hat{S}_{1kl}(\lambda)$ is the statistical estimator of spectral density calculated by the first fragment of length $T_1 = \tau$-1, $\hat{S}_{2kl}(\lambda)$ — by the second fragment of length $T_2 = T - \tau + 1$; $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \in [-\pi, \pi]$ is a set of m fixed frequencies, such that $\sum_{s=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{p} \left| S_{1kl}(\lambda_s) - S_{2kl}(\lambda_s) \right|^2 > 0$.

If the estimators of spectral densities are independent and have asymptotic standard normal distributions, the statistic (1) also has the asymptotic standard normal distribution with known parameters. In [1] the test for H_0, $H_{1\tau}$ has constructed with the asymptotic significance level $\varepsilon \in (0;1)$:

$$\text{decide for } \begin{cases} H_0, \text{ if } \hat{U}^2(\tau) < \delta_\varepsilon, \\ H_{1\tau}, \text{ if } \hat{U}^2(\tau) \ge \delta_\varepsilon, \end{cases}, \quad \delta_\varepsilon = \pi\left(\frac{K_{T_1}}{T_1} + \frac{K_{T_2}}{T_2}\right)\left(\sqrt{2}\Phi^{-1}(1-\varepsilon)+1\right)Q, \tag{2}$$

where $\Phi^{-1}(\alpha)$ is the quantile of the standard normal distribution, $Q = \int_{-\infty}^{\infty} W^2(\alpha)d\alpha$, $W(\alpha)$ — the weight function. The asymptotic estimate of power for the test (2) is also found.

The following statistic has proposed for detection of a change-point:

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau \in \{\tau_-, \ldots, \tau_+\}} \hat{U}^2(\tau).$$

References

1. Abramovich M. Testing of spectral “disorders” in vector time series. // Pattern Recognition and Information Processing: Proc. of Fourth Int. Conf. PRIP’97. Vol. 2. — Minsk-Szczecin, 1997. — P. 165-169.