УПРОЩЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПАР (ЧАСТОТ) В ЛИНЕЙНОМ ПРЕДСКАЗАНИИ РЕЧИ

Павлов О.И.

Национальный технический университет Украины “КПИ”
252056, Киев-56, пр.Победы, 37, Радиотехнический ф-т, каф. ТОР.
E-mail: OPmail@mail.ru

Автором разработана методика линейных спектральных частот высших порядков, применение которой для цифровой обработки речевых сигналов позволяет существенно сократить объемы вычислений по сравнению с классическим методом линейных спектральных пар (ЛСП), связанные с поиском корней полиномов, получаемых в результате анализа речи и восстановлением параметров синтезирующего фильтра по найденным (принятым) значениям этих корней. Одним из ключевых моментов этой методики являются описываемые ниже **P**- и **R**- матрицы коэффициентов прямого и обратного разложения гармонической функции *2Cos(kw)* в конечный степенной ряд. В настоящей статье обсуждаются алгоритмы формирования таких матриц и их использование для упрощения реализации классического метода ЛСП.

Представление гармонической функции в виде конечного степенного ряда

При кодировании речевых сигналов на основе линейного предсказания с использованием метода ЛСП [1]–[4] возникает необходимость в решении уравнения вида

$$\sum_{k=0}^{K} a_k Cos(kw) = 0 . \qquad (1)$$

Представление гармонической функции *Cos(kw)* в виде конечного степенного ряда позволяет эффективно находить корни такого уравнения. Использование формул разложения тригонометрических функций кратных углов позволяет привести уравнение (1) к виду: $\sum_{k=0}^{K} a'_k Cos^k(w) = 0$. Такое уравнение может быть решено относительно w, например, как это описано в [5] при нахождении линейных спектральных корней вещественной и мнимой частей полинома, образованного из передаточной функции линейного предсказателя речи, либо с помощью замены переменной $2Cos(w) = x$ может быть сведено к уравнению: $\sum_{k=0}^{K} a''_k x^k = 0$, для которого может быть осуществлен поиск корней x_i на интервале $-2 \le x_i \le 2$.

К сожалению, выражения, позволяющие для произвольного k найти коэффициенты разложения функции *Cos(kw)* (или функции *2Cos(kw)*) в ряд по степеням функции *Cos(w)* (или функции *2Cos(w)*) отсутствуют в справочной литературе, например, в такой популярной, как [6], где приводятся формулы разложения в ряд функций кратных углов по степеням кофункций с использованием биномиальных коэффициентов.

Далее приводится простой рекурентной алгоритм нахождения значений коэффициентов разложения функции *2Cos(kw)* в ряд по степеням функции *2Cos(w)*.

Пусть: $2Cos(w) = x$, тогда в общем случае справедливо:

$$2Cos(kw) = \sum_{i=0}^{k} p_{k,i} x^{k-i} . \qquad (2)$$

<u>Теорема 1</u>. Коэффициенты $p_{k,i}$ полиномов вида (2) образуют треугольную матрицу, являющуюся частью квадратной матрицы **P** порядка k, рис.1, элементы $p_{m,n}$ которой могут быть найдены по следующим правилам: Элемент $p_{0,0}=2$. Элементы $p_{0,n}=0$, для $n=1,...,k$. Элемент $p_{1,0}=1$. Элементы $p_{1,n}=0$, для $n=1,...,k$. Остальные элементы равны:

$$p_{m,n} = \begin{cases} p_{m-1,n}, & m = 2,\ldots,k; \quad n = 0,1; \\ p_{m-1,n} - p_{k-2,i-2}, & m = 2,\ldots,k; \quad n = 2,\ldots,k; \end{cases} \qquad (3)$$

Заметим, что все нечетные столбцы матрицы Р равны нулю, а для четных столбцов наблюдается чередование знаков.

Доказательство теоремы 1 может быть выполнено, например, методом математической индукции и здесь не приводится.

m,n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...	k	...
0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	...
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...	0	...
2	1	0	$0-2$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	...
3	1	0	$-2-1$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	...
4	1	0	$-3-1$	0	$0+2$	0	0	0	0	0	...	0	...
5	1	0	$-4-1$	0	$2+3$	0	0	0	0	0	...	0	...
6	1	0	$-5-1$	0	$5+4$	0	$0-2$	0	0	0	...	0	...
7	1	0	$-6-1$	0	$9+5$	0	$-2-5$	0	0	0	...	0	...
8	1	0	$-7-1$	0	$14+6$	0	$-7-9$	0	$0+2$	0	...	0	...
9	1	0	$-8-1$	0	$20+7$	0	$-16-14$	0	$2+7$	0	...	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k	$p_{k,0}$	$p_{k,1}$	$p_{k,2}$	$p_{k,3}$	$p_{k,4}$	$p_{k,5}$	$p_{k,6}$	$p_{k,7}$	$p_{k,8}$	$p_{k,9}$	...	$p_{k,k}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Рис.1.

Представление гармонического многочлена в виде степенного

Покажем, как приведенная на рис.1 матрица **P** может быть использована при решении задачи поиска параметров синтезирующего фильтра кратковременного предсказателя в передатчике речепреобразующего устройства, основанного на линейном предсказании сигнала и методе ЛСП.

Согласно методу ЛСП [1]–[4], синтезирующий фильтр линейного предсказателя, соответствующий полиному $A(z)=1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}+\ldots+a_M z^{-M}$, описывается корнями пары вспомогательных полиномов – антисимметричного полинома $P(z)=A(z)-z^{-(M+1)}A(z^{-1})$ и симметричного полинома $Q(z)=A(z)+z^{-(M+1)}A(z^{-1})$, корни которых находятся проще чем комплексные корни исходного полинома *A(z)*. Поскольку корни вспомогательных полиномов *P(z)* и *Q(z)* лежат на единичной окружности и перемежаются, причем, среди корней имеются два очевидных корня: $z_0=+1$ и $z_{M+1}=-1$, а остальные $2M$ корней образуют комплексно-сопряженные пары, то нахождение корней полиномов *P(z)* и *Q(z)* с помощью замены переменной $z=e^{jw}$ сводится к решению уравнений вида

$$\begin{aligned} P'(w) &= \sum_{i=0}^{M_p} p'_i Cos((M_p - i)w) = 0, \\ Q'(w) &= \sum_{i=0}^{M_q} q'_i Cos((M_q - i)w) = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

корни w_i которых образуют линейные спектральные пары (частоты) и ищутся в интервале $0<w_i<\pi$.

Поиск корней уравнений (4) обычно осуществляется численными методами, например, методом половинного деления.

Используя представление гармонической функции *Cos(kw)* в виде степенного многочлена порядка-*k* относительно функции $x=2Cos(w)$: $Cos(kw)=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} p_{k,i}x^{k-i}$, где коэффициенты $p_{k,i}$ - есть коэффициенты квадратной матрицы **P** (см. рис.1), можно свести уравнения (4) к виду

$$\begin{aligned} P'(w) &= \sum_{i=0}^{M_p} p'_i Cos((M_p - i)w) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_p} p''_i (2Cos(w))^{M_p - i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_p} p''_i x^{M_p - i} = 0, \\ Q'(w) &= \sum_{i=0}^{M_q} q'_i Cos((M_q - i)w) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_q} q''_i (2Cos(w))^{M_q - i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_q} q''_i x^{M_q - i} = 0 \end{aligned} \quad , \qquad (5)$$

что позволяет существенно упростить их численное решение.

Поскольку автором разработан метод линейных спектральных частот высших порядков, основанный на многократном применении описанного выше преобразования полиномов, вплоть до полиномов 1-го порядка, что позволяет полностью исключить необходимость применения численных методов поиска корней приведенных уравнений, то, с этой точки зрения, больший интерес представляет следующая обобщенная формула, позволяющая представить гармонический многочлен в виде степенного многочлена:

$$\sum_{k=0}^{M} d_k Cos(kw) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M} d'_k (2Cos(w))^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{M} d'_k x^k \,. \qquad (6)$$

Теорема 2. Коэффициенты d'_k степенного многочлена (6) могут быть получены на основании коэффициентов d_k гармонического многочлена (6) по следующей формуле:

$$d'_k = \sum_{j=0}^{M-k} d_{k+j} p_{k+j,j}, \qquad 0 \le k \le M , \tag{7}$$

где $p_{m,n}$ – элементы матрицы **P** порядка M (см теорему 1 и рис.1).

Доказательство теоремы 2 может быть выполнено, например, методом математической индукции и здесь не приводится.

Представление степенного многочлена в виде гармонического

В приемнике речепреобразующего устройства решается обратная задача, – представление гармонического многочлена в виде степенного многочлена и восстановление параметров синтезирующего фильтра линейного предсказателя $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_M z^{-M}$ по принятым (найденным) значения линейных спектральных частот w_i (или x_i) – корней уровнения (5). При этом, сначала восстанавливаются коэффициенты степенных многочленов

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{M_p} p''_i x^{M_p - i} = p''_{M_p} \prod_{i=0}^{M_p}\left(x - x_{p,i}\right) = p''_{M_p} \prod_{i=0}^{M_p}\left(2Cos(w) - 2Cos(w_{p,i})\right), \\ &\sum_{i=0}^{M_q} q''_i x^{M_q - i} = q''_{M_q} \prod_{i=0}^{M_q}\left(x - x_{q,i}\right) = q''_{M_q} \prod_{i=0}^{M_q}\left(2Cos(w) - 2Cos(w_{q,i})\right) \end{aligned},$$

а затем, используя формулы понижения степени для функций $Cos^k(w)$ получают коэффициенты вспомогательных гармонических многочленов,

$$\begin{aligned} P'(w) &= \sum_{i=0}^{M_p} p'_i Cos((M_p - i)w) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_p} p''_i (2Cos(w))^{M_p - i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_p} p''_i x^{M_p - i}, \\ Q'(w) &= \sum_{i=0}^{M_q} q'_i Cos((M_q - i)w) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_q} q''_i (2Cos(w))^{M_q - i} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{M_q} q''_i x^{M_q - i} \end{aligned},$$

что позволяет определить полиномы $P(z)$ и $Q(z)$, а по ним восстановить исходный полином $A(z) = \frac{1}{2}\left(P(z) + Q(z)\right)$.

Поскольку больший интерес представляет обобщенная формула преобразования степенного многочлена в гармонический многочлен

$$\sum_{k=0}^{M} d'_k x^k = \sum_{k=0}^{M} d'_k (2Cos(w))^k = 2\sum_{k=0}^{M} d_k Cos(kw) \tag{8}$$

где $x = 2Cos(w)$, рассмотрим далее простой рекурентный алгоритм нахождения коэффициентов такого гармонического многочлена.

Теорема 3. Коэффициенты d_k гармонического многочлена (8) могут быть найдены через коэффициенты d'_k степенного многочлена (8) по следующей формуле:

$$d_k = \begin{cases} \dfrac{d'_0 r_{0,0}}{2} + \sum_{j=1}^{M} d'_j r_{j,j}, & k = 0 \\ \sum_{j=0}^{M-k} d'_{k+j} r_{k+j,j}, & 1 \le k \le M \end{cases}, \tag{9}$$

где $r_{m,n}$ - есть коэффициенты квадратной матрицы **R** (рис.2).

m,n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	k
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	0	3	0	3	0	1	0	0	0	0	0	0
4	1	0	4	0	6	0	4	0	1	0	0	0	0
5	1	0	5	0	10	0	10	0	5	0	1	0	0
6	1	0	6	0	15	0	20	0	15	0	6	…	…
7	1	0	7	0	21	0	35	0	35	0	21	…	…
8	1	0	8	0	28	0	56	0	70	0	56	…	…
9	1	0	9	0	36	0	84	0	126	0	126	…	…
10	1	0	10	0	45	0	120	0	210	0	252	…	…
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
k	$r_{k,0}$	$r_{k,1}$	$r_{k,2}$	$r_{k,3}$	$r_{k,4}$	$r_{k,5}$	$r_{k,6}$	$r_{k,7}$	$r_{k,8}$	$r_{k,9}$	$r_{k,10}$	…	$r_{k,k}$

Рис.2

Заметим, что элементы $r_{m,n}$ матрицы **R** могут быть найдены из треугольника Паскаля или могут быть образованы по следующему правилу: Элементы $r_{m,0}=1$, для $m=0,\ldots,k$. Элементы $r_{m,1}=0$, для $m=0,\ldots,k$. Элементы $r_{0,n}=0$, для $n=1,\ldots,k$. Остальные элементы равны: $r_{m,n}=r_{m-1,n-2}+r_{m-1,n}$, $m=1,\ldots,k$; $n=2,\ldots,k$;

Доказательство теоремы 3 может быть выполнено, например, методом математической индукции и здесь не приводится.

Литература

1. Soong F.K., Yuang B.-h. Line spectrum pair (LSP) and speech data compression. Proc. ICASSP-84 // IEEE Int. Conf. on Acoust., and Signal Process., San Diego, Calif., 19-21 March, 1984. - V. 1. - P. 1.10.1 - 1.10.4.
2. Коротаев Г.А. Анализ и синтез речевого сигнала методом линейного предсказания. - Зарубежная радиоэлектроника, 1990, N3.
3. Коротаев Г.А. Некоторые аспекты линейного предсказания при анализе и синтезе речевого сигнала. - Зарубежная радиоэлектроника, 1991, N7.
4. Коротаев Г.А. Эффективный алгоритм кодирования речевого сигнала на скорости 4,8 кбит/с и ниже. - Зарубежная радиоэлектроника, 1996, N3.
5. Воробьев В.И., Иванов В.Н., Улахович Д.А. Спектральные пары в линейном предсказании // Радиоэлектроника. - 1991. - N12. - С. 32-37. (Изв. высш. учеб. заведений).
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). / Под ред. И.Г.Арамановича. Изд. 4-е, - М.: Наука, 1977.