БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРЯМОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В МЕТОДЕ ЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЧАСТОТ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Павлов О.И.

Национальный технический университет Украины “КПИ”
252056, Киев-56, пр.Победы, 37, Радиотехнический ф-т, каф. ТОР.
E-mail: OPmail@mail.ru

В данной статье описан быстрый алгоритм прямого полиномиального преобразования (П-преобразования) коэффициентов линейного предсказателя, соответствующего устойчивому полиному *A(z)* степени *M*, и дано его графическое представление. Показано, что быстрый алгоритм прямого П-преобразования может быть получен для любого *M*, причем алгоритм сводится к повторению однотипных операций на каждом из этапов преобразования, число *L* которых связано со степенью *M* исходного полинома *A(z)* следующим образом: $L = \log_2(M)$.

Поскольку предлагаемая методика использует многократное повторение преобразований полиномов и их коэффициентов, применяемых в классическом методе линейных спектральных пар (частот), то в данном разделе будем применять следующие обозначения: для отражения истории образования каждого полинома или коэффициента будем использовать цепочку верхних индексов, а в тех местах, где не будет возникать неоднозначность толкования, верхние индексы будем опускать. Например: запись $G^{pq}(z)$ будет означать полином *G(z)*, образованный на основании полинома *Q(z)*, который в свою очередь был получен из полинома *P(z)*; запись $S^{pqv}(z)$ будет означать полиномы $S^{pqp}(z)$ и $S^{pqq}z)$, причем полином $S^{pqp}(z)$ это полином *S(z)*, образованный на основании полинома *P(z)*, который в свою очередь был получен из полинома *Q(z)*, который в свою очередь был образован из полинома *P(z)*, а полином $S^{pqq}(z)$ это полином *S(z)*, образованный на основании полинома *Q(z)*, который в свою очередь был получен из полинома *Q(z)*, который в свою очередь был образован из полинома *P(z)*.

Верхний индекс *v* будем также использовать для обозначения степеней полиномов на каждом этапе преобразований, например, запись *M* будет означать степень полинома *A(z)* на 1-м этапе преобразования, запись M^v будет означать степень полинома $A^v(z)$ на 2-м этапе преобразования, и т.д.

Изложение строится на примере рассмотрения двух случаев: случая линейного предсказателя 10-го порядка (*M=10*), и случая линейного предсказателя 16-го порядка (*M=16*).

1-я операция любого этапа

Первой операцией каждого этапа прямого П-преобразования является операция трансформации приведенного относительно свободного члена полинома *A(z)* степени *M*, представленного своими *M* коэффициентами a_i (*i=1,2,...,M*) в пару приведенных относительно свободного члена полиномов степени *M+1*: антисимметричного *P(z)* и симметричного *Q(z)*. При этом, с учетом свойства антисимметрии коэффициентов p_i полинома *P(z)* и симметрии коэффициентов q_i полинома *Q(z)* достаточно вычислить только половину (часть) коэффициентов полиномов *P(z)* и *Q(z)*. Заметим, что в итоге, общее количество коэффициентов представления остается прежним и равным *M* (не считая предопределенных коэффициентов при старшем члене и свободном члене, всегда равных единице, поскольку полином *A(z)* является приведенным относительно свободного члена, и коэффициента $p_{(M+1)/2}$ для нечетного *M*, который всегда равен нулю).

Предлагается следующее правило трансформации коэффициентов представления a_i в коэффициенты представления p_i и q_i, применимое для любого значения *M*:

1. Создается расширенное множество исходных коэффициентов представления a_i, для этого *M* коэффициентов представления a_i (*i=1,2,...,M*) дополняется 0-м коэффициентом, равным единице ($a_0=1$) и (*M+1*)-м коэффициентом, равным нулю ($a_{M+1}=0$).
2. Создается массив исходных значений размерностью *M+2*, если *M* — четное, или размерностью *M+3*, если *M* — нечетное, который, таким образом, всегда имеет четную размерность и одновременно заполняется с начала и с конца (к середине) значениями расширенного множества исходных коэффициентов представления a_i (*i=0,1,2,...,M, M+1*), начиная с 0-го коэффициента и с (*M+1*)-го коэффициента, соответственно.
3. Путем попарного суммирования элементом массива исходных значений, выбираемых со знаком “плюс” (двойные красные линии на рис.1) или со знаком “минус” (одиночные черные линии на рис.1) вычисляется расширенное множество результирующих коэффициентов представления p_i и q_i, образующие массив результатов той же размерности, что и массив исходных значений, рис.1, и содержащий (кроме собственно коэффициентов представления p_i и q_i) доплнительные 0-е коэффициенты, равные единице ($p_0=q_0=1$) и коэффициент $p_{(M+1)/2}$ для нечетного *M*, который всегда равен нулю, рис.1.

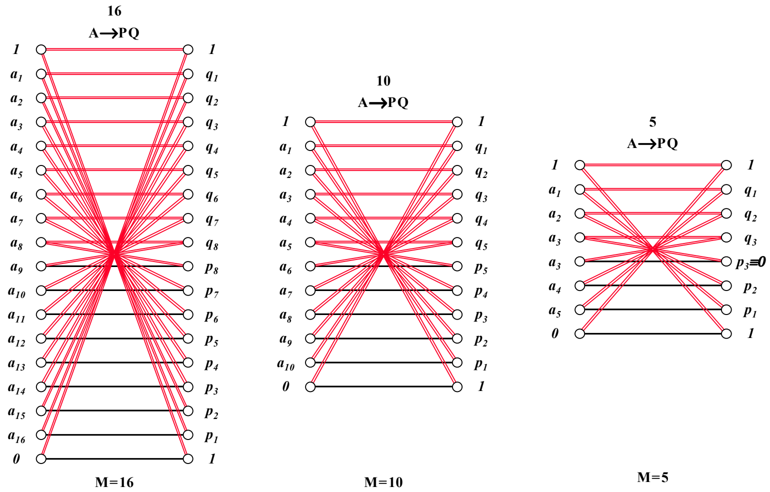

Рис.1. Графическое представление первой операции любого этапа

2-я операция любого этапа

Второй операцией каждого этапа прямого П-преобразования является операция трансформации пары приведенных относительно свободного члена полиномов, — антисимметричного полинома $P(z)$ степени $M+1$, представленного своими M антисимметричными коэффициентами $p_i=-p_{M+1-i}$ $(i=1,2,...,M)$ и симметричного полинома $Q(z)$ степени $M+1$, представленного своими M симметричными коэффициентами $q_i=q_{M+1-i}$ $(i=1,2,...,M)$, — в пару приведенных относительно свободного члена симметричных полиномов, всегда имеющих четную степень: полинома $G^p(z)$ степени K^p, представленного своими K^p симметричными коэффициентами $g^p{}_i=g^p{}_K p_{-i}$ $(i=1,2,...,K^p)$ и полинома $G^q(z)$ степени K^q, представленного своими K^q симметричными коэффициентами $g^q{}_i=g^q{}_K q_{-i}$ $(i=1,2,...,K^q)$. Данная операция основана на делении антисимметричного полинома $P(z)$ на многочлен $(1-z^{-1})$ и симметричного полинома $Q(z)$ на многочлен $(1+z^{-1})$, в случае, если M четное, или делении антисимметричного полинома $P(z)$ на многочлен $(1-z^{-1})$ и многочлен $(1+z^{-1})$, а симметричного полинома $Q(z)$ на 1, в случае, если M нечетное. Коэффициенты $g^p{}_i$ и $g^q{}_i$ полиномов $G^p(z)$ и $G^q(z)$ могут быть найдены, например, по схеме Горнера. При этом, с учетом свойства симметрии коэффициентов $g^p{}_i$ и $g^q{}_i$ полиномов $G^p(z)$ и $G^q(z)$ достаточно вычислить только половину (часть) их коэффициентов. Заметим, что в итоге, общее количество коэффициентов представления остается прежним и равным M (не считая предопределенных коэффициентов при старшем члене и свободном члене, всегда равных единице: $g^p{}_0=g^q{}_0=1$, и коэффициент $g^p{}_{(M+1)/2}$ для нечетного M, который всегда равен нулю).

Предлагается следующее правило трансформации коэффициентов представления p_i и q_i в коэффициенты представления $g^p{}_i$ и $g^q{}_i$, применимое для любого значения M:

Расширенное множество коэффициентов представления p_i и q_i, полученное в результате выполнения 1-го преобразования текущего этапа и содержащее (кроме собственно $M/2$ для четного M, или $(M+1)/2$ для нечетного M, коэффициентов представления p_i и q_i) доплнительные 0-е коэффициенты, равные единице ($p_0=q_0=1$), рис.1, путем рекурентного суммирования с сохранением и накоплением для коэффициентов p_i, выбираемых, начиная начала множества (с коэффициента $p_0=1$), со знаком “плюс” (двойные красные линии на рис.2) и рекурентного суммирования с сохранением и накоплением для коэффициентов q_i, выбираемых, начиная с конца множества (с коэффициента $q_0=1$) со знаком “минус” (одиночные черные линии на рис.2) для случая четного M, или путем рекурентного суммирования с сохранением промежуточных результатов и накоплением для коэффициентов p_i, выбираемых, начиная с p_0, со знаком “плюс” (двойные красные линии на рис.2) и рекурентного суммирования с сохранением и накоплением сохраненных ранее промежуточных результатов, выбираемых, начиная с промежуточного результата, соответствующего p_0, со знаком “минус” (одиночные черные линии на рис.2) и тождественного преобразования для коэффициентов q_i, для случая нечетного M, вычисляются результирующие коэффициенты представления $g^p{}_i$ и $g^q{}_i$, образующие массив результатов той же размерности, что и массив исходных значений, рис.2, содержащий, кроме этого, дополнительные 0-е коэффициенты, равные единице: $g^p{}_0=g^q{}_0=1$, и коэффициент $g^p{}_{(M+1)/2}$ для нечетного M, который всегда равен нулю.

3-я операция любого этапа

Третьей операцией каждого этапа прямого П-преобразования является операция трансформации приведенных относительно свободного члена симметричных полиномов $G^v(z)$, полученных в результате предыдущей операции, всегда имеющих четные степени K^v и представленных своими K^v симметричными коэффициентами $g^v_i=g^v_{K^v-i}$ $(i=1,2,...,K^v)$, в степенные многочлены $D^v(x)$ степени $N^v=K^v/2$, приведенные относительно переменной x и представленные своими N^v коэффициентами с обратной нумерацией индексов (старший индекс соответствует младшей степени) d^v_i $(i=1,2,...,N^v)$. Данная операция основана на свойстве симметрии коэффициентов g^v_i полиномов $G^v(z)$ и свойстве его корней, всегда находящихся на единичной окружности, и выполняется по формуле пересчета h^v_i коэффициентов N^v-гармонического многочлена, тождественно равных g^v_i коэффициентам, в коэффициенты d^v_i N^v-степенного многочлена, предложенной и доказанной ранее, а именно:

$$\begin{aligned} d_i^v &= \sum_{j=0}^{i} g_{i-j}^v p_{N^v-i+j,j}, \quad i=0,1,\dots,N^v-1 \\ d_i^v &= \frac{g_{N^v}^v p_{0,0}}{2} + \sum_{j=1}^{N^v} g_{N^v-j}^v p_{j,j}, \quad i=N^v \end{aligned}, \tag{1}$$

где коэффициенты $\boldsymbol{p_{m,n}}$ есть элементы матрицы $\mathbf{P}$ порядка N^v, которые могут быть найдены по следующим правилам: Элемент $p_{0,0}=2$. Элементы $p_{0,n}=0$, для $n=1,...,k$. Элемент $p_{1,0}=1$. Элементы $p_{1,n}=0$, для $n=1,...,k$. Остальные элементы равны:

$$p_{m,n} = \begin{cases} p_{m-1,n}, & m=2,\dots,k; \quad n=0,1; \\ p_{m-1,n} - p_{k-2,i-2}, & m=2,\dots,k; \quad n=2,\dots,k; \end{cases} \tag{2}$$

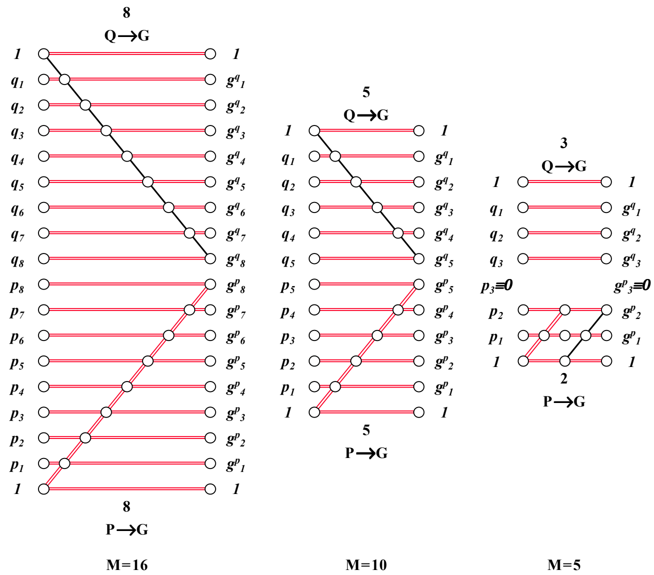

Рис.2. Графическое представление второй операция любого этапа

Заметим, что в итоге, общее количество коэффициентов представления остается прежним и равным M (не считая предопределенных коэффициентов при старшем члене, всегда равных единице: $d^q_0=d^p_0=1$, и коэффициента $d^p_{(M+1)/2}$ для нечетного M, который всегда равен нулю).

Графическая интерпретация операций данного преобразования, сводящихся к пересчету коэффициентов представления g^q_i, выбираемых из массива исходных значений (полученного в результате предыдущего преобразования), начиная начала массива (с коэффициента $g^q_0=1$), в коэффициенты представления d^q_i, и коэффициентов представления g^p_i, выбираемых из массива исходных значений, начиная конца массива (с коэффициента $g^q_0=1$), в коэффициенты представления d^p_i, осуществляемого по формуле (1), применимой для любого значения M (и, значит, любых степеней K^v и $N^v=K^v/2$ симметричных полиномов $G^v(z)$ и степенных многочленов $D^v(x)$) представлена на рис.3.

4-я операция любого этапа

Четвертой операцией каждого этапа прямого П-преобразования является операция трансформации степенных многочленов $D^v(x)$ степени N^v, приведенных относительно переменной x и представленных своими N^v коэффициентами с обратной нумерацией индексов (старший индекс соответствует младшей степени) d^v_i ($i=1,2,...,N^v$) в степенные многочлены $S^v(z)$ степени N^v, приведенные относительно переменной z и представленные своими N^v коэффициентами с обратной нумерацией индексов (старший индекс соответствует младшей степени) s^v_i ($i=1,2,...,N^v$). Данная операция основана на свойстве корней степенных многочленов $D^v(x)$, являющихся чисто вещественными и заключенными в интервале $]-2;+2[$, и выполняется по формуле пересчета d^v_i коэффициентов в коэффициенты s^v_i путем их взвешивания с неравномерным весом, равным 2^{-i}:

$$s_i^v = d_i^v / 2^i, \ i = 0,1,\ldots,N^v, \tag{3}$$

так, что корни степенных многочленов $S^v(z)$ оказываются заключенными в интервале $]-1;+1[$. Заметим, что в итоге, общее количество коэффициентов представления остается прежним и равным M (не считая предопределенных коэффициентов при старшем члене, всегда равных единице: $s^q_0=s^p_0=1$, и коэффициента $s^p_{(M+1)/2}$ для нечетного M, который всегда равен нулю).

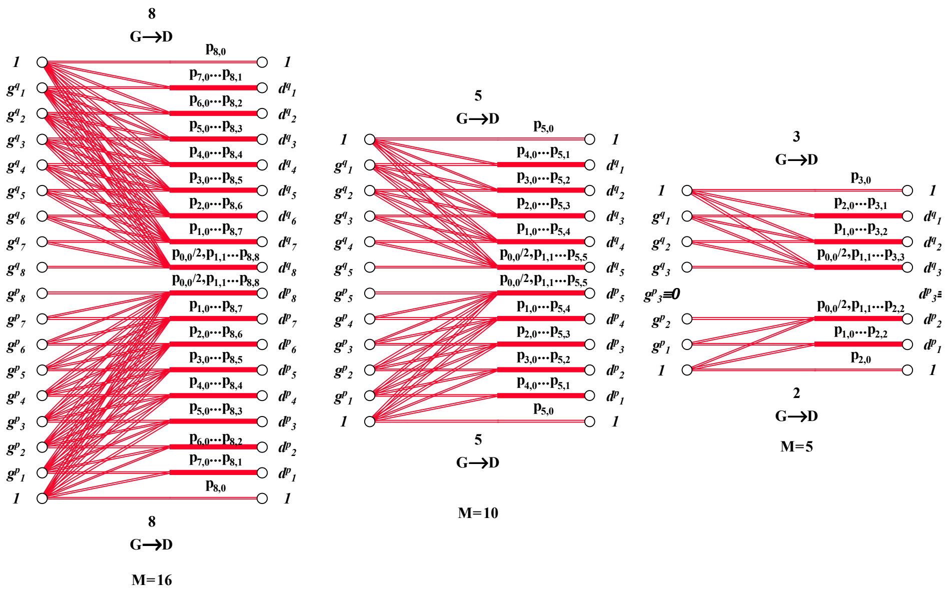

Рис.3. Графическое представление третьей операция любого этапа

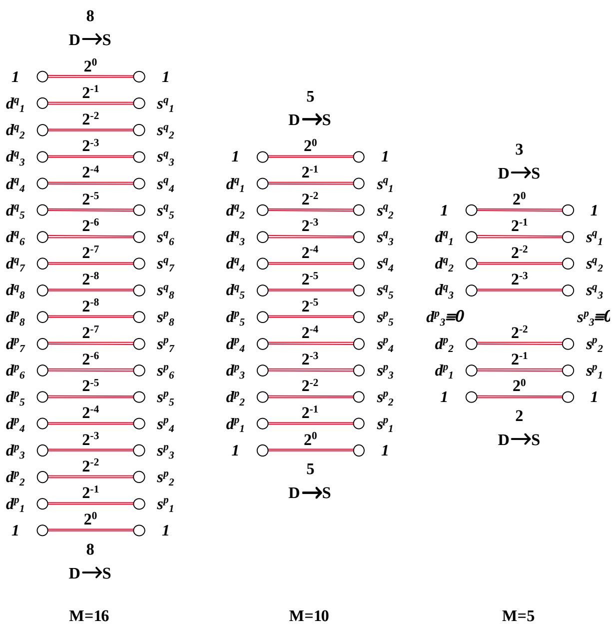

Рис.4. Графическое представление четвертой операции любого этапа

Графическая интерпретация операций данного преобразования, сводящихся к пересчету коэффициентов представления d^v_i в коэффициенты представления s^v_i по формуле (3), применимой для любого значения M (и, значит, любых степеней N^v степенных многочленов $D^v(x)$ и $S^v(z)$) представлена на рис.4.

5-я (формальная) операция любого этапа

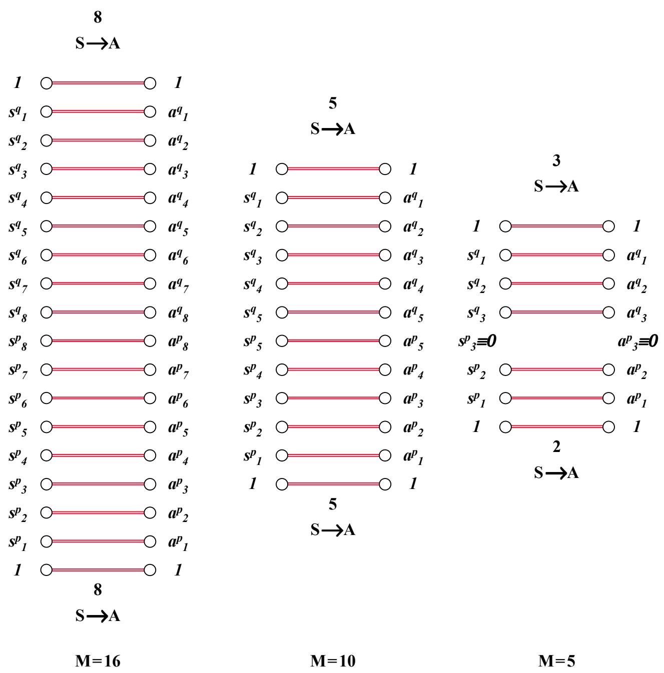

Рис.5. Графическое представление пятой операция любого этапа

Пятой операцией каждого этапа прямого П-преобразования является операция трансформации степенных многочленов $S^v(z)$ степени N^v, приведенных относительно переменной z и представленных своими N^v коэффициентами с обратной нумерацией индексов (старший индекс соответствует младшей степени) s^v_i ($i=1,2,...,N^v$) в степенные полиномы $A^v(z)$ степени N^v, приведенные относительно свободного члена и представленные своими N^v коэффициентами с прямой нумерацией индексов (старший индекс соответствует более высокой степени) a^v_i ($i=1,2,...,N^v$). Данная операция основана на том, что полиномы $A^v(z)$ имеют те же множества корней, что и степенные многочлены $S^v(x)$ (за исключением, быть может, значения 0), а значит являются устойчивыми, и выполняется путем формальной замены обозначений коэффициентов s^v_i на коэффициенты a^v_i, рис.5. Заметим, что в итоге, общее количество коэффициентов представления остается прежним и равным M (не считая предопределенных коэффициентов при старшем члене, всегда равных единице: $a^q_0=a^p_0=1$, и коэффициента $a^p_{(M+1)/2}$ для нечетного M, который всегда равен нулю).

Литература

1. Павлов О.И. Упрощение реализации метода линейных спектральных пар (частот) в линейном предсказании речи // Труды 3-й Международной конференции “Цифровая обработка сигналов и ее применение”, Москва, 2000.
2. Soong F.K., Yuang B.-h. Line spectrum pair (LSP) and speech data compression. Proc. ICASSP-84 // IEEE Int. Conf. on Acoust., and Signal Process., San Diego, Calif., 19-21 March, 1984. - V. 1. - P. 1.10.1 - 1.10.4.
3. Коротаев Г.А. Анализ и синтез речевого сигнала методом линейного предсказания. - Зарубежная радиоэлектроника, 1990, N3.
4. Коротаев Г.А. Некоторые аспекты линейного предсказания при анализе и синтезе речевого сигнала. - Зарубежная радиоэлектроника, 1991, N7.
5. Коротаев Г.А. Эффективный алгоритм кодирования речевого сигнала на скорости 4,8 кбит/с и ниже. - Зарубежная радиоэлектроника, 1996, N3.