**ОЦЕНКА АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОМПОНЕНТ ДЛЯ КОРОТКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДАННЫХ**

Нугманов И.С, Бердунов Н.В.

Казанский государственный университет, каф. радиофизики
Кремлевская 18, Казань 42008, Россия
Ildus.Nugmanov@ksu.ru, Nikolai.Berdunov@ksu.ru
Тел. (8432)-315174

В настоящей работе рассматривается задача оценивания амплитуды и фазы гармонического сигнала для случая, когда период наблюдения сравним с периодом оцениваемой компоненты.

Модель (1) известна в литературе как модель циклических компонент

$$x_t = \mu + a\cos(\omega t + \theta) + \varepsilon_t\,, \tag{1}$$

где $\mu$ – среднее, $a$ - амплитуда, $\omega$ – угловая частота и $\theta$ – фаза, $\varepsilon_t$ ошибка модельного представления ряда. Оценка параметров $\mu$, $a$ и $\theta$

$$a = \sqrt{qs^2 + qc^2}\,, \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{qs}{qc}. \qquad \mu = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t\,, \quad qc = \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \cos(\omega t), \quad qs = \frac{2}{T}\sum_{t=1}^{T} x_t \sin(\omega t), \tag{2}$$

Среднее, математическое ожидание величины ошибки модельного представления ряда $M[\varepsilon_t] = 0$, а дисперсия [1]

$$D[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2 - \frac{T}{2}\left(qs^2 + qc^2\right)}{T}.$$

Напомним, что эти оценки действительны для случая, когда период циклической компоненты $2\pi/\omega$ нацело делит период наблюдения T или время наблюдения намного больше периода оцениваемого сигнала. Однако на практике приходится сталкиваться со случаями, когда время наблюдения T мало и не кратно периоду оцениваемого сигнала. В этом случае авторы [2] ссылаются на громоздкость получаемых выражений и невозможность получения дисперсии и математического ожидания в явном виде. В свою очередь, мы попытались привести оценки амплитуды и фазы к компактному виду.

В результате оценивания параметров модели циклических компонент (1), для случая известного среднего m = 0, по методу максимума правдоподобия получаем

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{(1 - 2z\cos\phi + z^2)qc^2 + (1 + 2z\cos\phi + z^2)qs^2 - 4qsqc\sin\phi}}{1 + z^2}$$

$$tg\hat{\theta}^2 = \frac{(1 + z\cos\phi)qs - zqc\sin\phi}{(1 - z\cos\phi)qc - zqs\sin\phi} \qquad \text{где} \qquad z = \frac{\sin 2k\pi}{2k\pi}, \phi = 2k\pi, k = \frac{T}{T_0} \tag{3}$$

Как видно из формул (3), оценки амплитуды и фазы являются функциями отношения времени наблюдения T и периода сигнала $T_0$, и когда *к* стремится к бесконечности, получаем формулы (2).

Перейдем к совместной плотности распределения оценок амплитуды и фазы

$$w(\hat{a},\hat{\theta}) = \frac{\hat{a}\;T\;\sqrt{1 - z^2}}{4\,\pi\,N_0}\operatorname{Exp}\left\{-\frac{T}{4\,N_0}\left[a^2 + \hat{a}^2 + \hat{a}^2 z\cos(\phi - 2\theta) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - 2a\,\hat{a}\,(z\cos(\phi - \theta - \hat{\theta}) + \cos(\theta - \hat{\theta})) + \hat{a}^2 z\cos(\phi - 2\hat{\theta})\;\right]\right\} \tag{4}$$

Как мы видим, совместная плотность распределения $w(\hat{a},\hat{\theta})$ зависит от априорных величин ($a$, $\theta$). В дальнейшем, мы будем использовать выражение (4) для анализа поведения оценок $(\hat{a},\hat{\theta})$.

Для удобства анализа введем относительные величины $(\hat{a}/a)=\hat{u}$ - относительную оценку амплитуды сигнала, $\dfrac{a^2T_0}{2N_0}=\gamma_0$ - отношение сигнал/шум на одном периоде сигнала, $(T\ /T_0)=k$ - отношение периода наблюдения к периоду сигнала, и перепишем уравнение (4)

$$w(\hat{a},\hat{\theta})=\frac{\hat{u}\gamma_0 k\sqrt{1-z^2}}{2\pi}Exp\left\{-\frac{\gamma_0 k}{2}\left[1+\hat{u}^2+\hat{u}^2 z\cos(\phi-2\theta)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-2\hat{u}(z\cos(\phi-\theta-\hat{\theta})+\cos(\theta-\hat{\theta}))+\hat{u}^2 z\cos(\phi-2\hat{\theta})\ \right]\ \right\}$$

Интегрирование по $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$ приводит к достаточно сложным выражениям, поэтому значения математического ожидания $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$, приведенные на рисунках 1 и 2, найдены численными методами.

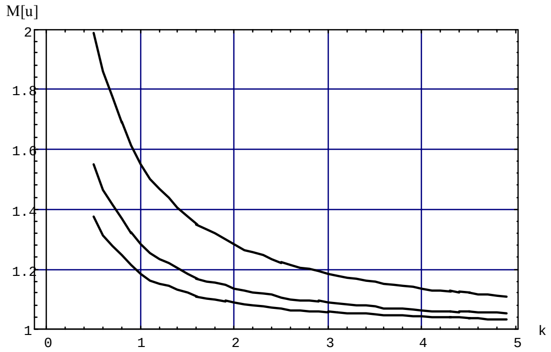


Рис.1. Математическое ожидание M[u] оценки амплитуды

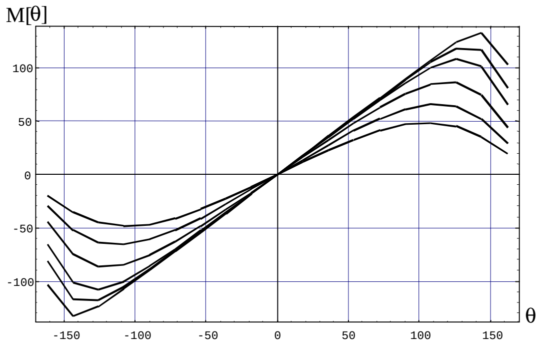


Рис.2. Математическое ожидание M[θ] оценки фазы

В таблице 1 приведены результаты численных оценок амплитуды гармонической компоненты методом наименьших квадратов (МНК) и методом максимума правдоподобия (ММП). Эти результаты свидетельствуют, что в случае короткого интервала наблюдения оценки амплитуды гармонической компоненты являются смещенными, как для метода наименьших квадратов, так и для метода максимума правдоподобия. МНК-оценки будут совпадать с ММП-оценками в случае если отношение (интервал наблюдения/период) кратно 0.5, в ином случае оценки по методу наименьших квадратов имеют большую погрешность.

| Коэффициент $K=T/T_0$ | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.4 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| МНК оценка мат.ожидания | 1.51 | 1.53 | 1.63 | 1.43 | 1.39 | 1.34 |
| ММП оценка мат.ожидания | 1.46 | 1.48 | 1.52 | 1.36 | 1.39 | 1.31 |
| МНК оценка дисперсии | 0.95 | 0.89 | 0.77 | 0.79 | 0.58 | 0.50 |
| ММП оценка дисперсии | 0.91 | 0.79 | 0.71 | 0.72 | 0.58 | 0.48 |

Таблица 1. Оценки математического ожидания и дисперсии амплитуды гармонической компоненты, полученные методом наименьших квадратов (МНК) и методом максимума правдоподобия (ММП).

**Заключение**

Дисперсия и математическое ожидание оценок $\hat{a}$Ц$\hat{\theta}$ зависят от соотношения периода наблюдения к периоду сигнала. Как мы видим из рис.1, при величине сигнал/шум равной единице и k = 0.5, величина среднеквадратичного отклонения и смещения $\hat{a}$ становится сравнимой с истинным значением амплитуды.

Сделанные ранее оценки [9,2,3], не учитывают зависимости оценок фазы от величин k и $\gamma_0$, хотя, как мы видим из рисунка 1, ошибки оценивания фазы будут принимать значимые величины.

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.:Мир, 1976. 543 с.

2. Zhou G., Giannakis B. Harmonics in gaussian multiplicative and additive noise: Cramer-Rao bound // IEEE Transactions on Signal Processing. 1995, V.43, N5, pp.1217-1231

## AMPLITUDE AND PHASE ESTIMATION OF THE HARMONICS ANALYSIS IN CASE OF SHORT OBSERVATION DATA

Nugmanov I.S., Berdunov N.V.

RadioPhysics Dep. Of Kazan State University
Kremlevskaja str.18, Kazan 420008, Russia

In present work we consider the problem of amplitude and phase estimation in case of short observation data, when the data period is comparable to signal period.

The model (1) is well known in harmonics analysis

$$x_t = \mu + a\cos(\omega t + \theta) + \varepsilon_t\,, \tag{1}$$

where $\mu$ – mean, *a* - amplitude, $\omega$ – frequency è $\theta$ – phase, $\varepsilon_t$ error values as the estimation of the parameters $\mu$, *a* and $\theta$ [1].

Mean error values is M[ $\varepsilon_t$ ] = 0, and mean square error [1] is

$$D[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} x_t^2 - \left(\sum_{t=1}^{T} x_t\right)^2 - \frac{T}{2}\left(qs^2 + qc^2\right)}{T}.$$

Recall that this estimations are valid for case when signal period to observation period ratio is equal an integer or infinite number. In that case authors [2] refer to an difficulties for obtaining compact equation. However in many case of signal processing we faced the observation with short data and not multiple of signal periods. For that case, we have derived the equation of amplitude and phase in analytical form. As result of our attempts, we have got

$$\hat{a} = \frac{\sqrt{(1 - 2z\cos\phi + z^2)qc^2 + (1 + 2z\cos\phi + z^2)qs^2 - 4qsqc\sin\phi}}{1 + z^2} \tag{3}$$

$$tg\hat{\theta}^2 = \frac{(1 + z\cos\phi)qs - zqc\sin\phi}{(1 - z\cos\phi)qc - zqs\sin\phi} \qquad \text{where} \qquad z = \frac{\sin 2k\pi}{2k\pi}, \phi = 2k\pi, k = \frac{T}{T_0}$$

The amplitudes and phase estimations provided a function of a time observation T to a period signal ratio $T_0$ (3), when *ê* tends to infinity we are getting equations (2)

The next we have got a function of probability density

$$w(\hat{a},\hat{\theta}) = \frac{\hat{a}\ T\ \sqrt{1 - z^2}}{4\,\pi\,N_0}\,\mathrm{Exp}\left\{-\frac{T}{4\,N_0}\left[a^2 + \hat{a}^2 + \hat{a}^2 z\cos(\phi - 2\theta) - \right.\right. \tag{4}$$

$$\left.\left. - 2a\,\hat{a}\,(z\cos(\phi - \theta - \hat{\theta}) + \cos(\theta - \hat{\theta})) + \hat{a}^2 z\cos(\phi - 2\hat{\theta})\ \right]\right\}$$

which depends on (*a*, $\theta$) values. On figure 1,2 mean values of $\hat{a}$ and $\hat{\theta}$ estimations are showed

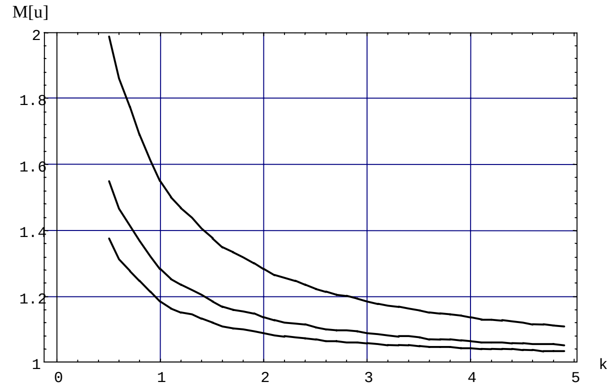


Fig.1. Mean values M[u] of amplitude estimation

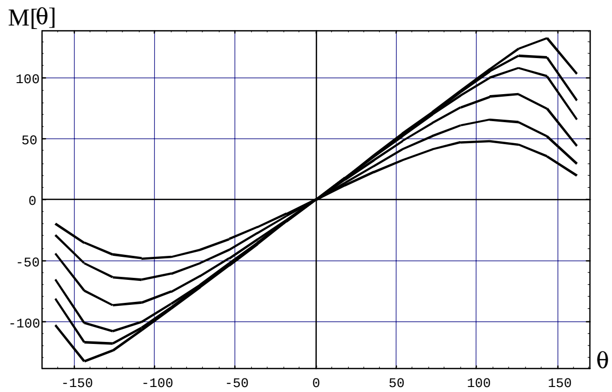


Fig.2. Mean values M[θ] of phase estimation

The results suggest that $\hat{a}$ и $\hat{\theta}$ estimations depend not only from $\gamma_0$ , but also $k$ .values.

1. Anderson T. Statistical analysis of time series.. Ì.:Ìir, 1976. 543 p.
2. Zhou G., Giannakis B. Harmonics in gaussian multiplicative and additive noise: Cramer-Rao bound // IEEE Transactions on Signal Processing. 1995, V.43, N5, p.1217-1231