АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ В МОДИФИЦИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н.
Рязанская Государственная Радиотехническая Академия.
390024 Рязань, ул. Гагарина, д.59, каф РУС.

Реферат: Рассмотрены алгоритмы вычисления спектра, спектральной плотности мощности (СПМ) и корреляционной функции (КФ) сигналов в модифицированном пространстве Соболева W_2^1. Доказана идентичность понятий спектра и СПМ сигналов в пространствах W_2^1 и L_2 . Показано, что при частоте дискретизации ниже частоты Котельникова точность вычисления спектра, СПМ и КФ сигналов в пространстве W_2^1 оказывается выше, чем в пространстве L_2.

1.Введение

В различных радиотехнических системах широкое применение находят алгоритмы цифровой спектральной обработки сигналов [1] в пространстве L_2, где выполняется условие ограниченности их энергии, а спектр сигнала находится с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ). При обработке случайных процессов рассматривают не спектр сигнала, а его спектральная плотность мощности (СПМ), которая находится как квадрат модуля спектра реализации, или, что идентично, как ДПФ от корреляционной функции (теорема Винера-Хинчина). Другим применением спектральной обработки является нахождение автокорреляционной функции по квадрату модуля спектра.

ДПФ обладает свойством периодичности, в связи с чем встает вопрос о правильном выборе частоты дискретизации, минимум которой определяется теоремой Котельникова [2]. При выборе частоты дискретизации меньше частоты Котельникова ($F_д<F_к$) происходит наложения спектров, а при $F_д>F_к$ увеличиваются вычислительные затраты на нахождение СПМ. Однако, на практике в большинстве случаев F_k неизвестна и приходится выбирать $F_д$ исходя из максимально возможного значения частоты Котельникова.

Представляет интерес разработка алгоритма более устойчивого, по сравнению с алгоритмом ДПФ, к неточному заданию частоты дискретизации. Такими свойствами, как будет показано ниже, обладают алгоритмы цифровой обработки сигналов в модифицированном пространстве Соболева.

2.Свойства пространства W21

Предлагается обработку дискретных сигналов проводить в модифицированном пространстве Соболева W21 [3], которое задается скалярным произведением:

$$\left(f(t), g(t)\right)=(1-\alpha)\int f(t)g(t)dt+\alpha\int\frac{df(t)}{dt}\frac{dg(t)}{dt}dt, \qquad (1)$$

где α- весовой коэффициент, изменяющийся в пределах $0\le\alpha<1$. Первое слагаемое, как и в пространстве L2, ограничивает энергию сигнала, а второе ограничивает энергию его производной. Таким образом, пространство W21 является подпространством пространства L2. Однако, реальные сигналы удовлетворяют условию ограниченности энергии производной, т.е. принадлежат пространству Соболева.

3.Алгоритм спектральной обработки сигналов

Вследствие изменения определения произведения двух функций, изменяется и выражение для определения спектра сигналов. Можно показать, что в пространстве W21 оно принимает вид:

$$G(k)=C_Д\sum_{n=0}^{N-1}\left[(1-\alpha)f(n)-j\alpha\frac{2\pi}{N}kf^{(1)}(n)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \qquad (2)$$

где $C_Д=1/\left[1-\alpha+\alpha(2\pi k/N)^2\right]$, $f^{(1)}(n)$ - приращение сигнала. Используя свойства преобразования Фурье [4], легко доказать идентичность полученных спектров в пространствах W21 и L2 при Fд>Fк. Однако, при FД<FК точность вычисления спектра в пространстве W21 оказывается выше, чем в пространстве L2.

Получено уравнение для определения коэффициента αopt, которое обеспечивает минимум ошибки нахождения спектра по критерию среднеквадратического отклонения (СКО). Исследования данного алгоритма были проведены при Fд<Fк и $\alpha=\alpha$opt для двух случаев: приращение сигнала определялось как первая разность отсчетов сигнала и как отсчеты производной сигнала. В обоих случаях показано повышение точности вычисления спектра, что позволяет снизить минимально-необходимую частоту дискретизации сигнала.

4.Алгоритмы оценки СПМ

Можно показать, что выражение для вычисления первичной оценки СПМ сигналов в пространстве W21 имеет вид

$$\hat{G}(k)=\frac{T}{N}\left|C_д\sum_{n=0}^{N-1}\left[(1-\alpha)\xi(n)-j\alpha\frac{2\pi}{N}k\xi^{(1)}(n)\right]e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right|^2. \qquad (3)$$

Преобразуя (3) получим аналог теоремы Винера-Хинчина в модифицированном пространстве Соболева:

$$\hat{G}(k)=C_{\partial}^{2}\sum_{n=0}^{N-1}(1-\alpha)^{2}\hat{B}(n)\cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)-2\alpha\frac{2\pi k}{N}(1-\alpha)\hat{B}^{(1)}(n)\sin\left(\frac{2\pi}{N}nk\right)-$$

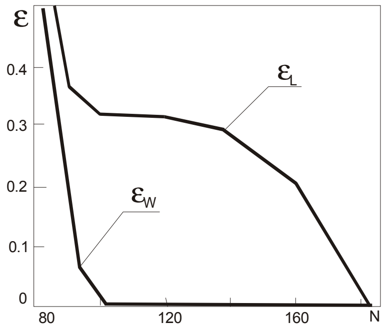
$$-\alpha^{2}\left(\frac{2\pi}{N}k\right)^{2}\hat{B}^{(2)}(n)\cos\left(\frac{2\pi}{N}nk\right), \qquad (4)$$

где ξ(n)-реализация стационарного случайного процесса, $\hat{B}(n)$ - оценка КФ данного процесса. Получено уравнение для определения α_{opt} по критерию минимума СКО. Для исследования свойств алгоритма (4) использовалась точная оценка КФ, поэтому сглаживание не проводилось. График зависимости ошибки по критерию СКО ε от числа отсчетов КФ на интервале анализа приведен на рисунке. Из анализа рисунка следует, что предложенный алгоритм обработки сигнала позволяет снизить частоту дискретизации в 1.8 раза при ошибке оценки СПМ не более 1%.

5.Алгоритм оценки корреляционной функции

Одним из широко распространенных методов оценки КФ является косвенный метод [5], который заключается в вычислении при помощи быстрого преобразования Фурье оценки СПМ и построении ее обратного преобразования Фурье. Применение алгоритма (3) позволяет повысить точность вычислений КФ вследствие слабой чувствительности оценки СПМ к неправильному выбору частоты дискретизации при некотором увеличении объема вычислений. Однако, предложенный алгоритм допускает распараллеливание процесса вычислений, что позволяет получать оценки СПМ в пространствах W_2^1 и L_2 за одно и тоже время вычислений.

Литература



1. Голд Б., Рэйдер Ч. Цифровая обработка сигналов. М.: Сов. радио, 1973. -367с.
2. Котельников В.А. О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи. – М.: Энергетический комитет, 1933.
3. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. - Киев: Наукова думка, 1965. -800с.
4. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио, 1974. –552с.
5. Бендат Дж., Пирсол А.. Измерение и анализ случайных процессов. – М.: Мир, 1974. –464с.

ALGORITHMS OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING IN THE MODIFIED SOBOLEV SPACE

Kirillov S.N., Buzykanov S.N.
Ryazan's State Radioengineering Academy.
390024, Russia, Ryazan, Gagarin's street, 59, RGRTA, RUS dep.
Ph. (0912) 72-99-79.

Abstract. The algorithms of spectrum's calculation , spectral density of capacity (SDC) and correlation function (CF) of signals in the modified Sobolev space W_2^1 are considered. The identity of concepts of a spectrum and SDC of signals in spaces W_2^1 and L_2 is proved. The possibility of decrease of discretion's frequency below than Kotelnikov 's one without increase of a mistake of calculation is shown.

1.Introduction

The algorithms of digital spectral signal processing [1] in space L_2, where the condition of their energy's limitation is satisfied, are found a wide application in different radioengineering systems. The spectrum of a signal discover by discrete Fourier transform (DFT). During the processing occasional processes consider not a spectrum of a signal but its spectral density of a capacity (SDC), which is found as quadrate of the module of realization's spectrum, or, that is identical, as DFT from correlation function (Wiener-Hinchin theorem). Other application of spectral processing is finding of an autocorrelation function on quadrate of the module of a spectrum.

DFT has periodicity's property, in this connection a question of a right choice of discretion's frequency, which minimum is determinated by Kotelnikov theorem [2], arises

The purpose of work is development of an steadier algorithm, by comparison with the algorithm of DFT to the incorrect setting of. discretion's frequency.

2. Properties of space W_2^1

It is proposed to carry out processing of discrete signals in the modified Sobolev space W_2^1 [3], where additional restrictions on the energy of signal's derivation are imposed. However, the actual signals satisfy the condition of limitation of derivation's energy, it means they belong to Sobolev space .

3.The Algorithm of spectral signal processing

The expression for the definition of signal spectrum in Sobolev space was discovered. Using properties of Fourier transform [4], it is easy to prove identity of spectra in spaces W_2^1 and L_2.

Researches of given algorithm of spectrum's determination were carried out for two cases: signal increment was defined as the first residual of signal references and as references of signal derivation. In both cases the raising of exactitude of spectrum's evaluation of a is shown, that allows to lower a minimum - necessary frequency of signal's discretion.

4. Algorithms of an evaluation SDC

Following the expression for evaluation of signal spectrum, the analog of Wiener - Hinchin theorem in space W_2^1 was discovered. The increase of exactitude of evaluation of estimation of SDC of a signal was shown at discretion's frequency below than Kotelnikov's one, that gives an opportunaty to decrease the frequency of signal discretion.

5. Algorithm of evaluation of correlation function

One of the wide - spread methods of CF evaluation is an indirect method [5]. It consists of evaluation by fast Fourier transform of SDC estimation and of construction of its Fourier reconversion. The application of signal processing in Sobolev space allows to increase exactitude of CF evaluations at the expense of nonsensitivity of SDC estimation to an incorrect choice of discretion's frequency.