ДВУМЕРНЫЙ АЛГОРИТМ НАИСКОРЕЙШЕГО ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ КВАНТОВАНИЯ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФИЛЬТРА

Пачкунов А.В., Судаков А.А., Смирнов А.Ю.

Ярославский государственный университет им П.Г. Демидова
150000, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел. (0852) 32-11-94. E-mail: pixie@uniyar.ac.ru

Реферат. Разработан двумерный алгоритм для оптимизации коэффициентов двумерного адаптивного цифрового фильтра. Алгоритм основан на методе оптимизации Коши, где производится оптимизация блоков входной информации. Алгоритм используется для восстановления изображений. Производится учет эффектов квантования весовых коэффициентов адаптивного фильтра. Приведенные результаты иллюстрируют эффективность системы для подавления помех в изображениях.

1. Введение

Градиентный метод, представленный в [1], обладает недостатком из-за необходимости выбора подходящей длины шага итерации для обеспечения устойчивой работы фильтра. Поэтому существует потребность для разработки алгоритма, в котором значение длины шага определялось бы на каждой итерации алгоритма. Представлен двумерный алгоритм, базирующийся на методе Коши. Он предназначен для оптимизации коэффициентов цифрового фильтра и позволяет решать задачи с квадратичными целевыми функциями. Этот метод отличается с одной стороны высокой устойчивостью при поиске оптимального вектора весовых коэффициентов фильтра при любых его начальных значениях, а с другой стороны, позволяет существенно уменьшить значение целевой функции при движении из точек, расположенных на значительных расстояниях от точки минимума.

2. Двумерный метод наискорейшего градиентного спуска

Метод Коши разработан для минимизации суммы квадратов выходных выборок, которая определяется маской $V(n_1, n_2)$ размером $K_1 \times K_2$ элементов [2]:

$$V(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)^2 \quad ,$$

$$e(n_1, n_2) = d(n_1, n_2) - y(n_1, n_2) = d(n_1, n_2) - \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} h(i, j)\, x(n_1 - i, n_2 - j) \ ,$$

где $y(n_1, n_2)$ – выходной сигнал фильтра, $x(n_1, n_2)$ – его входной сигнал, $h(i, j)$ – весовые коэффициенты фильтра, $e(n_1, n_2)$ - сигнал ошибки, $d(n_1, n_2)$ - сигнал, содержащий исходное изображение и помеху.

Метод Коши базируется на следующей формуле:

$$[h(l,m)]_{k+1} = [h(l,m)]_k - t_k \nabla (V(l,m)) \quad , \tag{1}$$

где параметр t_k определяет скорость и устойчивость процесса адаптации и находится для каждого значения k из условия:

$$\varphi(t_k) = [\sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} \{ d(n_1 - i, n_2 - j) -$$

$$- \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \big([h(l,m)]_k - t_k \nabla (V(l,m)) \big) x(n_1 - l - i, n_2 - m - j) \}^2] \to \min_{t_k} , \tag{2}$$

Решение задачи (2) осуществляется с использованием необходимого условия минимума $\partial \varphi / \partial t_k = 0$.

После громоздких математических выкладок получаем:

$$t_k = \frac{\sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, f(i, j)}{\sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} [f(i, j)]^2} , \tag{3а}$$

$$f(i, j) = \sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} \sum_{l}^{N} \sum_{m}^{M} x(n_1 - i - l, n_2 - j - m) \nabla V(l, m) . \tag{3б}$$

Подставляя значение градиента в (1), получаем формулу метода Коши:

$$[h(l,m)]_{k+1} = [h(l,m)]_k + 2t_k \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, x(n_1 - l - i, n_2 - m - j)\,, \tag{4}$$

где t_k определяется по формуле (3а).

Учет эффектов квантования коэффициентов адаптивного цифрового фильтра, алгоритм которого базируется на градиентном методе адаптации, можно произвести следующим образом [3]:

$$Q[(H_{l,m})_{k+1}] = Q[(H_{l,m})_k] + \\ + Q[2\mu \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, x(n_1 - l - i, n_2 - m - j)]\,, \tag{5}$$

а формула подстройки коэффициентов для двумерного алгоритма наискорейшего градиентного спуска (4) запишется следующим образом

$$Q[[h(l,m)]_{k+1}] = Q[[h(l,m)]_k] + Q[2 \times \frac{\sum_i^{K_1} \sum_j^{K_2} e(n_1 - i,\, n_2 - j)\, f(i,j)}{\sum_i^{K_1} \sum_j^{K_2} [f(i,j)]^2} \times \\ \times \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, x(n_1 - l - i, n_2 - m - j)], \tag{6}$$

где $f(i,j)$ определяется из формулы (3б).

3. Пример обработки изображений

На рис. 1 представлены зашумленное помехой с изменяющейся частотой и откорректированное адаптивным фильтром изображения. Обработка производилась по схеме, представленной в [1]. Видно, что изменяющаяся помеха практически удалена из изображения. Отметим, что в верхней части обработанного изображения осталась необработанная помеха. Это связано с тем, что сверху изображения адаптивный фильтр работает с заданными начальными условиями и каждый раз начинает подстраиваться заново.

Тестовое изображение было зашумлено синусоидальной помехой с переменой частотой, причём на адаптивный фильтр подавалась помеха, изменяющаяся подобным образом. Следует отметить, что амплитуда помехи ограничена максимальным значением яркости элементов изображения. Зашумленное изображение было обработано адаптивным фильтром первого порядка с маской $V(n_1, n_2)$ размером 5×5 элементов.

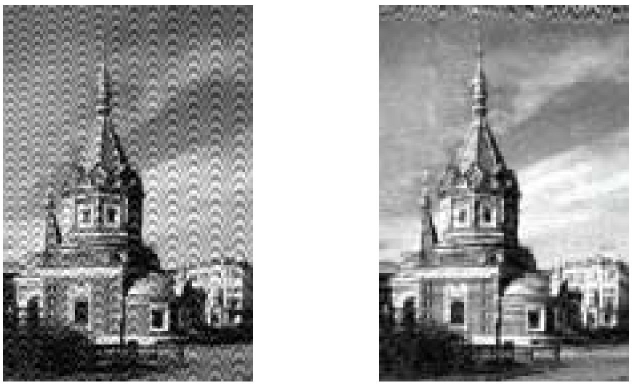

Рис. 1. Зашумленное с переменной частотой (слева) и обработанное адаптивным фильтром (справа) изображения

Более наглядно результат проведенного моделирования показывают спектры зашумленного и обработанного изображений. На рис. 2 (слева) приведён спектр зашумленного изображения (выбран логарифмический масштаб с минимальным уровнем 40 дБ). Отчётливо видна помеха с изменяющейся частотой. На рис. 2 (справа) представлен спектр обработанного адаптивным фильтром изображения. Хорошо заметно, что изменяющаяся помеха практически вырезана.

Рис. 2. Спектры искаженного с переменной частотой (слева)
и обработанного адаптивным фильтром (справа) изображения

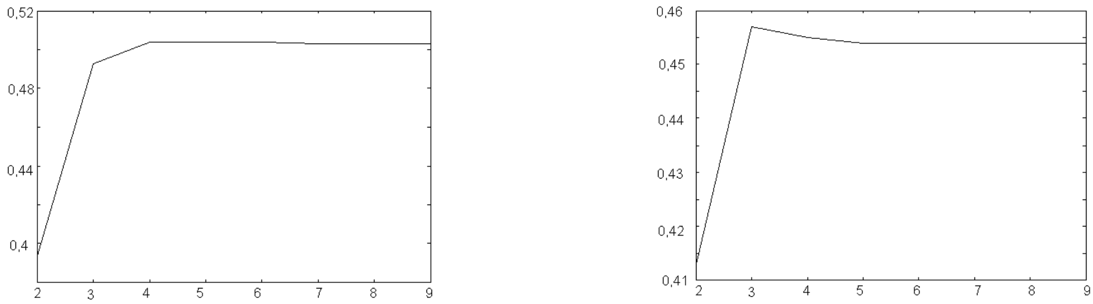

Рис. 3. Зависимость отношения сигнал-шум на выходе фильтра от числа разрядов квантования для градиентного алгоритма (слева) и для алгоритма наискорейшего градиентного спуска (справа) (квантование по схеме округления)

Произведем учет эффектов конечной разрядности весовых коэффициентов фильтра. На рис. 3 представлены зависимости отношения сигнал-шум на выходе фильтра от числа разрядов квантования для двумерного градиентного алгоритма и для алгоритма наискорейшего градиентного спуска. Квантование проводилось по схеме округления. На рис. 4 приведены зависимости отношения сигнал-шум на выходе фильтра от числа разрядов квантования, которое проводилось по схеме усечения по величине.

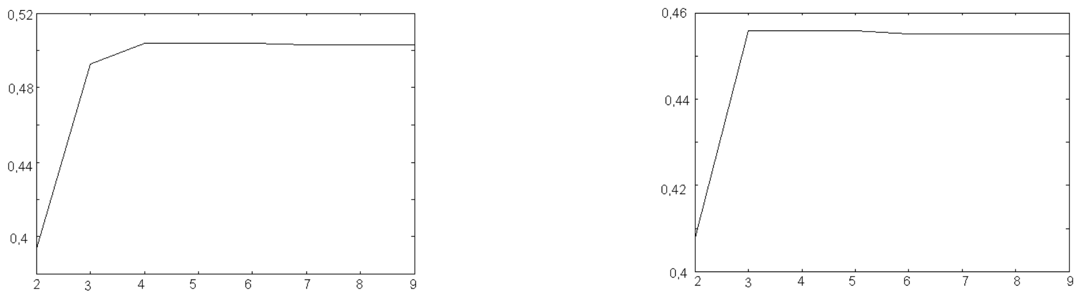

Рис. 4. Зависимость отношения сигнал-шум на выходе фильтра от числа разрядов квантования для градиентного алгоритма (слева) и для алгоритма наискорейшего градиентного спуска (справа) (квантование по схеме усечения по величине)

Видно, что оба адаптивных алгоритма при небольшом числе разрядов квантования имеют высокий уровень отношения сигнал-шум. С ростом числа разрядов квантования наблюдается насыщение, которое объясняется остаточной ошибкой сходимости адаптивных алгоритмов. Указанная ошибка увеличивается при квантовании весовых коэффициентов адаптивных фильтров.

Из представленных зависимостей можно сделать вывод, что градиентный алгоритм имеет некоторое преимущество по сравнению с алгоритмом наискорейшего градиентного спуска при квантовании весовых коэффициентов адаптивного фильтра. Это связано с тем, что параметр, отвечающий за скорость и точность сходимости, у алгоритма наискорейшего градиентного спуска находится исходя из мгновенных значений градиента рабочей функции, которые не являются точными оценками градиента рабочей функции.

4. Выводы

Разработан двумерный алгоритм наискорейшего градиентного спуска, который базируется на методе Коши. Он предназначен для оптимизации коэффициентов цифрового фильтра и позволяет решать задачи с квадратичными целевыми функциями. Этот метод отличается с одной стороны высокой устойчивостью при поиске оптимального вектора весовых коэффициентов фильтра с любыми начальными значениями, а с другой стороны, позволяет существенно уменьшить значение целевой функции при движении из точек, расположенных на значительных расстояниях от точки минимума.

Произведен учет эффектов квантования арифметических операций в цифровом фильтре. Он осуществляется путем введения ступенчатой функции нелинейности в итерационное уравнение. Использована модель с мультипликативным квантованием, которая учитывает только квантование произведений коэффициентов фильтра с соответствующими отсчетами и не учитывает квантование их суммы.

Библиография

1. Пачкунов А.В., Калинин С.А. Двумерная адаптивная фильтрация для восстановления изображений // Докл. 2-ой междунар. конф. и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применения» (DSPA'99), Москва, 1999. Т.2. С.507-511.
2. Пачкунов А.В., Смирнов А. Ю. Двумерный цифровой адаптивный фильтр на базе. метода наискорейшего градиентного спуска // Материалы междунар. науч.-техн. семинара «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций», Рязань, 1999. С.93-95.
3. Константиновский А.Г., Белинский В.Т., Бочаров В.Б., Кудинов А.В. Учет эффектов квантования в адаптивном фильтре, использующем среднеквадратическую ошибку. // Известия вузов. Радиоэлектроника. 1982. Т 25. № 1. С. 31-37.

TWO DIMENSIONAL ALGORITHM OF FASTEST GRADIENT REGRESSION WITH QUANTIZATION OF THE FILTER WEIGHT COEFFICIENTS

Pachkunov A.V., Sudakov A.A., Smirnov A.Yu.

Yaroslavl State University
Sovetskaja 14, Yaroslavl, Russia, 150000. Phone: (0852) 32-11-94. E-mail: cat@uniyar.ac.ru

Abstract. A two-dimensional (2-D) adaptive algorithm is developed for optimizing the adaptive filter coefficients. The algorithm is based on the Koshy method of optimization. In this algorithm, optimization is made over input data blocks. This algorithm is used for image restoration. Simulation results illustrate the efficiency of the system in noise cancellation.

1. Introduction

The gradient method represented in [1], has a shortage because of necessity of choice approaching length of iteration step for maintenance of filter's stable work. Therefore there is a need for development of algorithm, in which the value of step length would be determined on each iteration of algorithm. The two-dimensional algorithm based on the Koshy method is represented. It is used for optimization of the digital filter coefficients and allows to solve the problems with the quadratic goal functions. This method have high stability in searching of the optimum vector of the filter weight coefficients at any initial values, and also allows essentially to reduce a value of the goal function at moving from points located on significant distances from a valley.

2. Two dimensional algorithm of fastest gradient regression

Consider an adaptive algorithm designed for minimization of the sum of squares of output samples, which is determined by the mask $V(n_1, n_2)$ of size $K_1 \times K_2$:

$$V(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)^2 \ ,$$

$$e(n_1, n_2) = d(n_1, n_2) - y(n_1, n_2) = d(n_1, n_2) - \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} h(i, j)\, x(n_1 - i, n_2 - j) \ ,$$

where $e(n_1, n_2)$ is the error signal, $d(n_1, n_2)$ is a signal containing the initial image and the interference noise.
The Koshy method is based on the following formula:

$$[h(l,m)]_{k+1} = [h(l,m)]_k - t_k \nabla (V(l,m)) \ , \tag{1}$$

where the parameter μ determines speed and stability of adapting process. It is obtained from next formula

$$t_k = \frac{\sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, f(i, j)}{\sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} [f(i, j)]^2} \ ,$$

$$f(i, j) = \sum_{i}^{K_1} \sum_{j}^{K_2} \sum_{l}^{N} \sum_{m}^{M} x(n_1 - i - l, n_2 - j - m) \nabla V(l,m) .$$

Substituting values of the function $V(n_1, n_2)$ gradient in (1), we obtain the formula of the Koshy method:

$$[h(l,m)]_{k+1} = [h(l,m)]_k + 2 t_k \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, x(n_1 - l - i, n_2 - m - j) \ .$$

Quantization of weight coefficient is made by the next formula

$$Q[(h_{l,m})_{k+1}] = Q[(h_{l,m})_k] +$$
$$+ Q[2 t_k \sum_{i=0}^{K_1} \sum_{j=0}^{K_2} e(n_1 - i, n_2 - j)\, x(n_1 - l - i, n_2 - m - j)] \ .$$

3. Quantization effects

Let's introduce the account of effects of a final word length of weight filter coefficients. On fig.1 the dependencies of the signal noise ratio on filter's output from number of bits for two-dimensional gradient algorithm and for fastest gradient regression algorithm are represented. The rounding quantization was used.

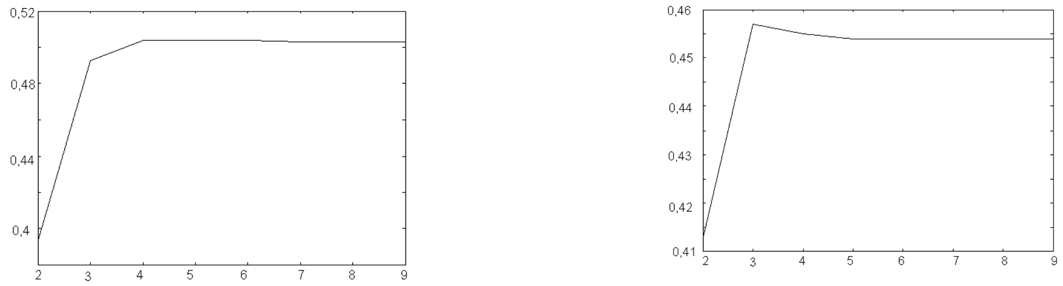

Fig. 1. Dependence of the signal noise ratio on filter's output from number of bitsfor gradient of algorithm (left), for fastest gradient regression algorithm (right)(rounding quantization)

From represented dependencies we can make a conclusion, that gradient algorithm has some advantage on a comparison with fastest gradient regression algorithm by quantization of weight coefficients of the adaptive filter. Cause of it that the parameter accountable for a convergence velocity and accuracy of at fastest gradient regression algorithm is evaluated from instantaneous values of the working function gradient, which is not exactly equal to goal function.

4. Conclusion

The two-dimensional fastest gradient regression algorithm based on the Koshy method is designed. It is intended for optimization of digital filter coefficients and allows to decide the problems with the quadratic goal functions. This method has high stability by searching of the optimum vector of filter weight coefficients at any initial values. Also it allows essentially to reduce a value of the goal function at moving from points located on significant distances from a valley.

The account of quantization effects of arithmetical operations in a digital filter is performed. The model with multiplicative quantization is used which takes into account only quantization of results of multiplying of filter coefficients on corresponding samples and does not take into account the quantization of accumulation results.

Bibliography

1. Pachkunov A.V., Kalinin S.A. Two-dimensional adaptive filtering for image restoring // Proc. of 2nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Applications" (DSPA'99), Moscow, 1999. V.2, pp.512-513.