

Цифровые фильтры с несимметричными характеристиками весьма желательны во многих приложениях. Проектировать такие фильтры с помощью стандартных методик достаточно сложно из-за необходимости использования многостадийных итеративных процедур. Предложен новый алгоритм и программа синтеза таких фильтров.

1. Введение

В основу решения задачи синтеза цифровых фильтров минимального порядка, удовлетворяющего заданным требованиям к его частотным характеристикам должны быть положены методы наилучшего приближения функций [1,4]. Однако разработанные процедуры плохо алгоритмизированы [2,3], что препятствует их широкому использованию при практическом проектировании. В идейном смысле предлагаемый метод опирается на рекуррентную процедуру построения дробей Чебышева, гарантирующую равнопульсирующую АЧХ в полосе пропускания при любых полюсах в полосах задерживания. Выбор же последних относится к классу ремезовских методов, специальным способом исключаящим этап решения систем уравнений на каждой итерации.

С помощью предложенного алгоритма можно синтезировать фильтры с гарантированно равнопульсирующими характеристиками в полосе пропускания и как с изокстремальными характеристиками в полосах задерживания, так и с характеристиками общего вида. В частности, можно синтезировать полосовой фильтр с разным количеством полюсов затухания в верхней и нижней полосах задерживания. Как будет показано ниже можно синтезировать структуры с ранее недостижимыми рекордными характеристиками - суперузкополосные фильтры и фильтры с очень низким уровнем пульсаций АЧХ в полосе пропускания.

Сходимость алгоритма иллюстрируют примеры, приведенные в работе.

2. Дроби Чебышева

Метод синтеза фильтров с характеристиками указанного вида описан в [2,3]. В [2] для получения дробей Чебышева использовалась область, связанная с p – областью преобразованием А.Ф. Белецкого. Однако это существенно усложняет расчеты. Нами предлагается другая процедура нахождения дробей Чебышева.

Пусть задан знаменатель дроби

$$D(N) = \prod_{k=1}^N (a_k - y) \quad ,$$

где $|a_k| \geq 1$.

Требуется найти числитель той же степени так, чтобы на интервале $y \in [-1, 1]$ получить равномерное единичное отклонение. Обозначим

$$f_k = a_k \cdot y - 1 ;$$

$$b_k = \sqrt{a_k^2 - 1} \cdot \text{sign}(a_k) ;$$

$$y_2 = y^2 - 1 ,$$

тогда имеет место **теорема** :

Числитель дроби Чебышева $C_N \equiv \frac{R_N}{D_N}$ вычисляется рекуррентно:

$$R_1 = f_1 ;$$

$$T_1 = l_1 ;$$

$$R_N = f_N \cdot R_{N-1} + l_N \cdot y_2 \cdot T_{N-1} ; \quad T_N = f_N \cdot T_{N-1} + l_N \cdot R_{N-1} .$$

Если числитель имеет степень на единицу выше знаменателя, то

$$R_{N+1} = y \cdot R_N + y_2 \cdot T_N .$$

Наконец, если степень числителя более, чем на единицу превышает степень знаменателя, используется соотношение А.Ф.Белецкого

$$R_{N+M} = 2 \cdot y \cdot R_{N+M-1} - R_{N+M-2} .$$

Таким образом, можно легко рассчитать числитель дроби Чебышева по любым известным полюсам a_k знаменателя. Дроби Чебышева

$$C_N \equiv \frac{R_N}{D_N} \quad (1)$$

имеет равнопульсирующую характеристику на интервале $y \in [-1, 1]$ (например, рис. 1).

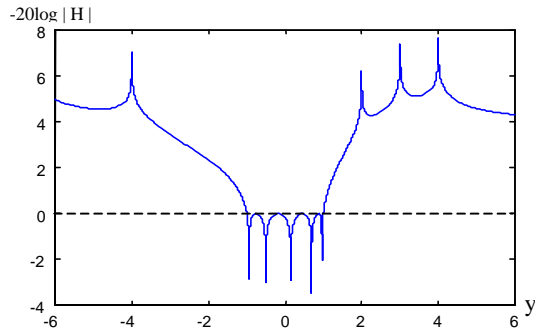


Рис.1

3. Расчет передаточной функции полосовых фильтров

Так как для расчета фильтров будем использовать классическую формулу :

$$|H|^2 = \frac{K^2}{1 + \varepsilon \cdot C_N(w^2)}, \quad (2)$$

необходимо такое частотное преобразование, которое связывает y - плоскость с квадратом аналоговой частоты w^2 . Одним из возможных вариантов такого преобразования является :

$$y = 2 \frac{w_{-1}^2 - w^2}{w_{-1}^2 - w_1^2} - 1 .$$

Если использовать обычную нормировку частот , имеем

$$y = 2 \frac{1 + p^2}{1 - w_1^2} - 1 . \quad (3)$$

Данное преобразование переводит часть плоскости y правее точки $y_0 = (1 + w_1^2)/(1 - w_1^2)$ в аналоговую плоскость p . Поэтому все полюса необходимо разместить в плоскости y правее этой точки. Полюс в y_0 соответствует полюсу $w_0 = 0$.

Для расчета цифровых фильтров можно использовать обычное НЧ - преобразование

$$p = m \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

$$m = \text{ctg} \left(\pi \cdot \frac{f_{-1}}{f_d} \right),$$

$$w_1 = m \cdot \text{tg} \left(\pi \cdot \frac{f_1}{f_d} \right).$$

Обозначим

$$c_1 = 1 + w_1^2,$$

$$c_2 = 1 - w_1^2,$$

$$c_3 = c_1 + 2 \cdot m^2,$$

$$c_4 = c_1 - 2 \cdot m^2,$$

тогда преобразование (2) примет вид :

$$y = \frac{c_3}{c_2} \cdot \frac{z^{-2} + 2 \frac{c_4}{c_3} \cdot z^{-1} + 1}{z^{-2} + 2 \cdot z^{-1} + 1} .$$

Теперь осталось определить дислокацию полюсов, имея требования к фильтру. Для этого разработана итерационная процедура, представляющая собой модификацию алгоритма Ремеза, которая в отличие от него не требует решения систем уравнений и самое главное - в полосе пропускания в любом случае будет равнопульсирующая характеристика с заданной величиной пульсаций.

На первом этапе выбираем на отрезках плоскости y , соответствующих полосам задерживания фильтра, N равноотстоящих точек, a_1, \dots, a_N . Подставив их в функцию (1), находим значения локальных

максимумов $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{N-2}$ функции $|C_N|$ на отрезке $|y| \geq 1$. Система точек a_k образует валлепуссоновский альтернанс.

Далее необходимо совершить переход к чебышевскому альтернансу, т.е. за счет перемещения альтернансных точек осуществить выравнивание локальных максимумов функции $|C_N|$ на отрезке $|y| \geq 1$. Для этого используем итерационный процесс, в котором происходит корректировка точек a_1, a_2, \dots, a_N до тех пор, пока разность $\delta_M - \delta_m$ не станет меньше или равной требуемой точности аппроксимации.

На практике наилучшие результаты дает циклическая корректировка значений a_k сначала двух наибольших, затем через 5 итераций двух наименьших экстремумов и т.д. Корректировка осуществляется следующим образом. Если между двумя полюсами затухания a_j и a_{j+1} расположен локальный максимум, то

$$a_j = a_j + \delta,$$

$$a_{j+1} = a_{j+1} - \delta,$$

если минимум, то

$$a_j = a_j - \delta,$$

$$a_{j+1} = a_{j+1} + \delta,$$

где знак равенства означает операцию присвоения, а δ - постоянная величина. Два полюса, граничащих с полосой пропускания, не меняются, так как они контролируют границы полос задерживания. На рис. 2 показан пример корректировки наименьшего и наибольшего по абсолютной величине экстремумов.

Расчет коэффициентов цифрового фильтра требует отдельного рассмотрения. Вычислив коэффициенты полиномов R_N и D_N , нужно найти корни знаменателя функции (2), а именно $D_N \cdot D_{N+\varepsilon} \cdot R_N \cdot R_N$. Число комплексно сопряженных пар корней равно количеству полюсов. Обозначим действительную и мнимую часть корней x_R и x_I соответственно.

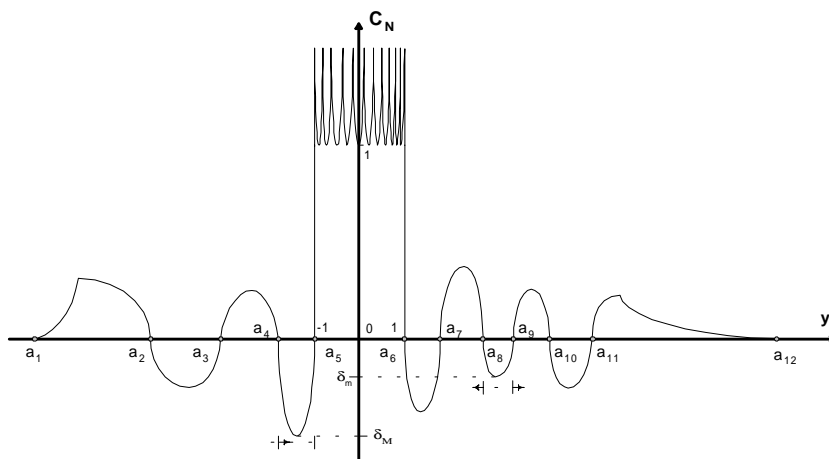


Рис. 2

Тогда множитель функции (2) для каждого полюса

$$\frac{(a - y)^2}{x_R + x_I - 2x_R y + y^2}.$$

Используя преобразование (3), получим

$$\frac{((ac_2 - c_3) + 2(ac_2 + c_4)z^{-1} + (ac_2 - c_3)z^{-2})^2}{b_1 + b_2 z^{-1} + b_3 z^{-2} + b_2 z^{-3} + b_1 z^{-4}}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= c_3^2 - 2x_R c_2 c_3 + c_5, \\ b_2 &= 4c_3 c_4 - 4x_R c_2 (c_3 + c_4) + 4c_5, \\ b_3 &= 2c_3^2 + 4c_4^2 - 4x_R c_2 (c_3 + 2c_4) + 6c_5, \\ c_5 &= c_2^2 (x_R^2 + x_I^2). \end{aligned}$$

Так как коэффициенты знаменателя симметричны, корни можно найти аналитически. В результате получим две комплексно-сопряженные пары корней, причем одна из них в области неустойчивости. Интересующая нас пара корней вычисляется следующим образом

$$\frac{(a - y)^2}{x_R + x_I - 2x_R y + y^2},$$

где

$$D = \frac{-b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 4b_1(b_3 - 2b_1)}}{2b_1}.$$

Обозначим действительную и мнимую часть корней u_R и u_I соответственно. С учетом этого выражение (4) примет вид

$$\left[\frac{1 + 2\frac{ac_2c_4}{ac_2c_3}z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2\frac{u_R}{u_R^2 + u_I^2}z^{-1} + \frac{1}{u_R^2 + u_I^2}z^{-2}} \right]^2.$$

Окончательно передаточная функция цифрового фильтра

$$H = K \frac{\prod \left[1 + 2\frac{ac_2 - c_4}{ac_2 - c_3}z^{-1} + z^{-2} \right]}{\prod \left[1 - 2\frac{u_R}{u_R^2 + u_I^2}z^{-1} + \frac{1}{u_R^2 + u_I^2}z^{-2} \right]}, \quad (5)$$

где

$$K = \frac{\prod (ac_2 - c_3)}{\prod \sqrt{b_1(u_R^2 + u_I^2)(\epsilon R_N^2(1) + D_N^2(1))}}$$

4. Примеры

На рисунках 3 – 5 показаны характеристики синтезированных фильтров.

- Параметры фильтра (рис. 3) следующие :**

$f_1=1000$ Гц , $f_2=1000,1$ Гц , $f_s=8000$ Гц , максимальное отклонение : 1 Дб , минимальное: 48,72 Дб.
Коэффициенты найденной передаточной функции приведены ниже

Числитель		
1	-2.000000000	1
1	-1.414269098	1
1	-1.414088047	1
1	-1.414068115	1
1	2.000000000	1
Знаменатель		
1	-1.414206997	0.999991495
1	-1.414169149	0.999975892
1	-1.414100415	0.999996910
1	-1.414104554	0.999987546
1	-1.414125575	0.999975033

- Параметры фильтра (рис. 4) :**

$f_1=5$ Гц , $f_2=100$ Гц , $f_s=8000$ Гц , максимальное отклонение : 1 Дб , минимальное: 51,31 Дб.
Коэффициенты вычисленной передаточной функции приведены ниже:

Числитель		
1	-2.000000000	1
1	-1.999996761	1
1	-1.990413793	1
1	-1.984850179	1
1	2.000000000	1
Знаменатель		
1	-1.988524262	0.994655575
1	-1.975377082	0.979709876
1	-1.963941219	0.965232824
1	-1.993373900	0.993421046
1	-1.999101741	0.999117317

• **Параметры фильтра (рис. 5) :**

$f_1=1000$ Гц , $f_2=2000$ Гц , $f_s=8000$ Гц , максимальное отклонение : $2,5 \cdot 10^{-6}$ Дб , минимальное : 53,75 Дб
 – правая полоса задерживания ; 100,5 Дб – левая полоса задерживания.
 Коэффициенты найденной передаточной функции приведены ниже..

1	-2.000000000	1
1	-1.713121923	1
1	-1.606251402	1
1	-1.569883021	1
1	-1.262531973	1
1	-1.250077119	1
1	-1.206910543	1
1	2.000000000	1

1	-1.431520048	0.980514844
1	-1.391447942	0.943135673
1	-1.341215186	0.912136938
1	-1.290853954	0.899454567
1	-1.260296621	0.914999839
1	-1.257381292	0.946613221
1	-1.266860476	0.973622964
1	-1.276995983	0.992234853

Литература

- [1] А.Ф. Белецкий : “Теоретические основы электропроводной связи”, ч.3, Москва, “Связь и радио”, 1959 г.
- [2] Д.Херреро, Г.Уиллонер : “Синтез фильтров” Москва, “Советское радио”, 1971 г.
- [3] "Современная теория фильтров и их проектирование", под ред. Г Темеша и С. Митры Москва, “Мир”, 1977 г.
- [4] А.А.Ланнэ : “Оптимальный синтез линейных электронных схем” Москва, “Связь”, 1978 г.
- [5] В.П.Еремеев, О.В.Мизиненко : “Оптимизация амплитудно частотных характеристик цифровых фильтров”, Сборник научных трудов ФРВС РАУ, Рига, 1998, стр.4-10

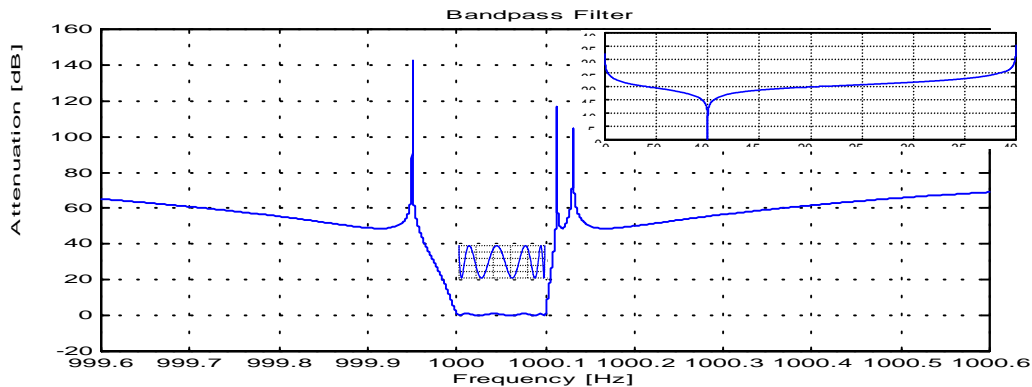


Рис. 3 АЧХ фильтра для первого примера

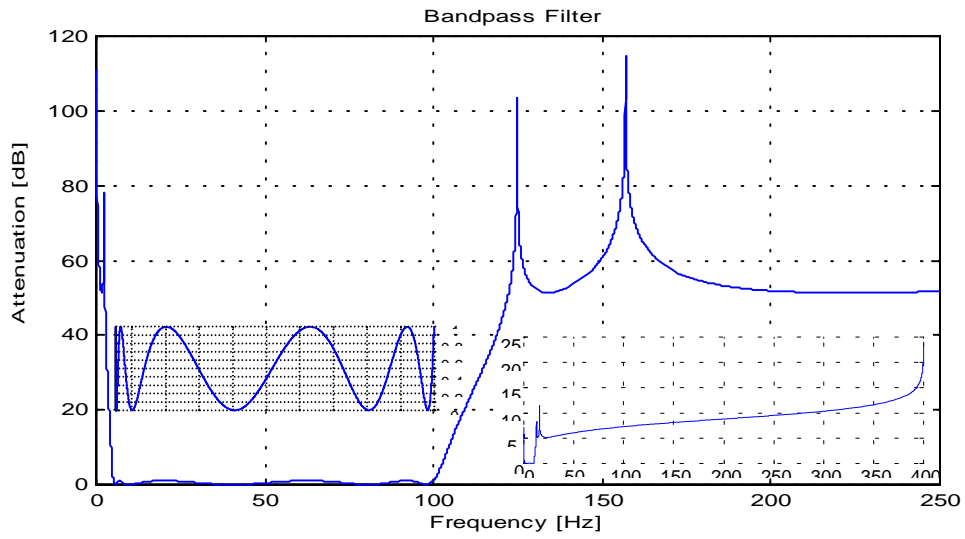


Рис. 4 АЧХ фильтра для второго примера

