МОДИФИКАЦИЯ ПОДХОДА М.АОКИ ДЛЯ АНАЛИЗА СХОДИМОСТИ ОЦЕНКИ АЛГОРИТМА СТОХАСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ФОРМЕ Я.З. ЦЫПКИНА

Буляница А.Л.(1), Бурылов Д.А.(2)

(1) Институт аналитического приборостроения РАН, Санкт-Петербург
(2) ООО «Мартингал», Санкт-Петербург

Аннотация. В работе рассмотрен метод доказательства сходимости оценки, формируемой алгоритмом стохастической аппроксимации в форме Я.З. Цыпкина [1] в условиях искажения постоянного сигнала *c** аддитивной центрируемой помехой ξ. В основу положен подход М. Аоки [2], требующий асимптотической сходимости к нулю расстояния между плотностями распределения вероятностей (ПРВ) оценок c_n и c_{n+k}, выполненных, соответственно, на *n*-м и *(n+k)*-м шагах работы алгоритма.

Введение.

Алгоритм стохастической аппроксимации Роббинса-Монро хорошо известен как один из квазиградиентных методов оценивания постоянного сигнала *c** в присутствии аддитивных помех. Одной из наиболее эффективных его робастных реализаций является модификация Я.З. Цыпкина [1] в форме:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \beta / n \cdot \Psi(\varepsilon_n - \xi_{n+1}), \qquad \varepsilon_1 = \xi_1 . \tag{1}$$

Здесь $\varepsilon_n = c_n - c^*$ – ошибка оценивания, c_n – оценка, ξ_n – центрированная помеха на *n*-м шаге работы алгоритма. Тем самым, прямое измерение на *n*-м шаге будет $x_n = c^* + \xi_n$. β -- параметр алгоритма (1), определяющий скорость сходимости оценки c_n. Функция Ψ осуществляет нелинейное преобразование, аналогичное неидеальному реле с зоной нечувствительности 2Δ. То есть,

$$\Psi(z) = \begin{cases} +1, z > \Delta \\ 0, |z| \le \Delta \\ -1, z < -\Delta \end{cases} .$$

В предыдущих работах [3,4] сходимость оценки c_n анализировалась с помощью представления (1) структурой нелинейной системы автоматического управления. В данной работе доказательство c_n к *c** основывается на подходе М.Аоки [2].

Анализ сходимости оценки алгоритма (1)

Поскольку помеха ξ_n случайна, то случайными величинами являются c_n и ε_n. Обозначим ПРВ и функцию распределения (ФР) случайной величины ε_n как $f_n(x)$ и $F_n(x)$ соответственно. Очевидно, что ПРВ c_n будет просто смещена относительно ПРВ ε_n на величину *c**.

Идея М.Аоки [2] допускает следующую интерпретацию: если $\rho(f_n, f_{n+k}) \to 0$ при $n \to \infty$, любом $k \in N$ и ρ – аналог расстояния, то ε_n асимптотически стремится к нулю. Выбор функции ρ жестко не задан, но во [2] выбрана М-оценка Хьюбера $\rho(f_n, f_{n+k}) = \sup|f_n(x) - f_{n+k}(x)|$ при $x \in R$.

Докажем, что при $n \to \infty$ разность $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ при любом $x \in R$. Обозначим ПРВ и ФР помехи ξ, соответственно, как *f(x)* и *F(x)*.

Рассмотрим элементарное событие $d\mathrm{A}_{n+1}$, заключающееся в том, что $\varepsilon_{n+1} \approx x$ или, что то же самое, $\varepsilon_{n+1} \in [x, x+dx]$. Его вероятность P, по определению, есть $f_{n+1}(x)dx$.

Сложное событие $d\mathrm{A}_{n+1}$ представляется в форме:

$$d\mathrm{A}_{n+1} = (\Psi = -1 \cap \varepsilon_n \approx x - \beta / n) \cup (\Psi = 0 \cap \varepsilon_n \approx x) \cup (\Psi = +1 \cap \varepsilon_n \approx x + \beta / n) . \tag{2}$$

Необходимо учесть: а) независимость ξ_n от ξ_{n+k}, что приведет к неизменности ПРВ и ФР помехи на любом шаге оценивания; б) альтернативность элементарных событий – первых множителей в слагаемых суммы (2); в) независимость событий - первых множителей от событий - вторых множителей каждого слагаемого (2).

Вероятности элементарных событий, входящих во (2), вычисляются по определению: $\mathrm{P}(\varepsilon_n \approx x - \beta / n) = f_n(x - \beta / n)dx$, $\mathrm{P}(\varepsilon_n \approx x + \beta / n) = f_n(x + \beta / n)dx$ и $\mathrm{P}(\varepsilon_n \approx x) = f_n(x)dx$. В то же время, вероятность событий - первых множителей представляет собой условную вероятность реализации первого события при условии реализации события - второго события. Тем самым, вероятность P_+ события $\Psi = +1$ вычисляется по следующей схеме:

$$\mathrm{P}_+ = \mathrm{P}(\varepsilon_n - \xi_{n+1} > \Delta) = \mathrm{P}(\xi_{n+1} < \varepsilon_n - \Delta) =$$
$$= \mathrm{P}(\xi_{n+1} < x + \beta / n - \Delta) = F(x + \beta / n - \Delta).$$

Величины $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P}(\Psi = 0)$ и $\mathrm{P}_- = \mathrm{P}(\Psi = -1)$ вычисляются по аналогичным схемам. Таким образом, $\mathrm{P}_0 = F(x + \Delta) - F(x - \Delta)$ и $\mathrm{P}_- = 1 - F(x - \beta / n + \Delta)$.

Выполнив почленное сокращение на dx , можно получить рекуррентную формулу связи ПРВ последовательных случайных величин ε_n и ε_{n+1}:

$$f_{n+1}(x) = f_n(x - \beta / n)[1 - F(x - \beta / n + \Delta)] + f_n(x)[F(x + \Delta) - F(x - \Delta)] +$$
$$+ f_n(x + \beta / n) F(x + \beta / n - \Delta); f_1(x) = f(x). \quad (3)$$

В работе [5] был рассмотрен случай сигнатурного оценщика ($\Delta=0$) и получена рекуррентная формула на основе аналогичных рассуждений. Она имеет более простой вид, по сравнению с (3):

$$f_{n+1}(x) = f_n(x - \beta / n)[1 - F(x - \beta / n)] + f_n(x + \beta / n) F(x + \beta / n) . \quad (4)$$

Безусловно, (4) может быть также получено из общей формулы (3) подстановкой $\Delta=0$.

Поскольку при $n \to \infty$ $\beta / n \to 0$, из (3) и (4) следует, что при произвольном $x \in R$ разность между $f_{n+1}(x)$ и $f_n(x)$ также будет бесконечно малой.

Заключение.

Использование алгоритма (1) в условиях искажения постоянного сигнала c^* аддитивной центрированной помехой ξ, можно сделать вывод о выполнении условия $\varepsilon_n \to 0$, то есть, о несмещенности оценки c_n относительно сигнала c^*.

Допустив помимо центрированности помехи ее симметричность, можно на основе метода полной математической индукции доказать симметричность любой ПРВ $f_{n+1}(x), n \geq 1$.

Благодарности.

Работа выполнена при частичной поддержке Гранта для студентов, аспирантов и молодых ученых Санкт-Петербурга.

Литература.

1. Цыпкин Я.З. //Доклады АН СССР. 1976. Т.228. № 6. С.1306-1309.
2. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М: Наука. 1971. 216 с.
3. Буляница А.Л., Курочкин В.Е., Бурылов Д.А. Анализ асимптотических свойств оценки рекурсивного алгоритма Я.З. Цыпкина с позиций теории автоматического управления /Доклады 3-й Межд. Конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения», 29 ноября - 1 декабря 2000 г., Москва, Россия, Т.1. С.17-21.
4. Буляница А.Л., Бурылов Д.А. // Научное приборостроение. 1998. Т.8. № 1-2. С.37-41.
5. Буляница А.Л., Бурылов Д.А. // Научное приборостроение. 1998. Т.8. № 1-2. С.32-36.

MODIFICATION OF THE M. AOKI APPROACH FOR THE ANALYSIS OF CONVERGENCE OF AN ESTIMATION OF STOCHASTIC APPROXIMATION ALGORITHM IN THE YA.Z. TSIPKINE SHAPE

Bulianitsa A., Burylov D.

P. (812) 251.7223, F. (812) 251.-7038, e-mail: bula@ianin.spb.su

One of embodyings algorithm of stochastic approximation by Robbins and Monro for the estimation of a constant level signal *c** at the presence of additive noise is the Ya.Z. Tsipkine's modification [1] in the shape:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \beta / n \cdot \Psi(\varepsilon_n - \xi_{n+1}), \qquad \varepsilon_1 = \xi_1 . \tag{1}$$

Here $\varepsilon_n = c_n - c^*$ - estimation error, c_n - estimation, ξ_n - centered noise and $x_n = c^* + \xi_n$ - measurement on *n*-st step of the algorithm operation, β - parameter of algorithm (1), the unlinear function Ψ is determined as $\Psi(z) = \begin{cases} +1, z > \Delta \\ 0, |z| \le \Delta \\ -1, z < -\Delta \end{cases}$.

In this paper, the convergence c_n to c^* is proved on the basis of the M.Aoki approach [2].

As the noise ξ_n is a random value, by a random variable will be ε_n. Let's designate it's density of probability distribution (DPD) and distribution function (DF) as $f_n(x)$ and $F_n(x)$ accordingly.

M. Aoki idea [2] admits one of the possible iexplanation: if $\rho(f_n, f_{n+k}) \to 0$ at $n \to \infty$, anyone $k \in \mathrm{N}$ and ρ - the analog of distance (for example, M-estimation by Huber), ε_n asymptotically tends to zero.

It's necessary proves, that at $n \to \infty$ the difference $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ tends to zero at anyone $x \in R$. Let's designate DPD and DF of noise ξ, accordingly, as *f(x)* and *F(x)*.

On the basis (1) the recursion formula of link DPD of sequential random variables ε_n is obtained for ε_{n+1} next form:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= f_n(x - \beta/n)[1 - F(x - \beta/n + \Delta)] + f_n(x)[F(x+\Delta) - F(x-\Delta)] + \\ &+ f_n(x + \beta/n) F(x + \beta/n - \Delta); f_1(x) = f(x). \end{aligned} \tag{2}$$

One of the famous cases (Δ=0) of this recursive equation was described in paper [3].

As at $n \to \infty$ $\beta/n \to 0$, from (2) follows, that at arbitrary $x \in R$ the difference between $f_{n+1}(x)$ and $f_n(x)$ will be infinitesimal.

Usage of algorithm (1) in requirements of contortion of a constant level signal *c** by additive centered noise ξ, is possible to make a conclusion about execution of a requirement $\varepsilon_n \to 0$, that is, about a unbiasedness of an estimate c_n concerning a true value of a signal *c**.

Having supposed also symmetry of noise ξ, is possible on the basis of the complete mathematical induction method to prove symmetry anyone DPD $f_{n+1}(x), n \ge 1$.

References:

1. Tsipkine Ya.Z. // Doklady USSR Ac.Sc. 1976. V.228. N 6. P.1306-1309. (in Russian)
2. Aoki M. Optimization of stochastic systems. Moscow: Nauka. 1971. 216 p. (in Russian)
3. Bulianitsa A.L., Burylov D.A. // Nauchnoje Priborostroenie. 1998. V.8. N 1-2. P.32-36. (in Russian)