

Башкирский государственный университет, каф. физической электроники
450074, г. Уфа, ул. Фрунзе, 32, тел. (3472)-23-65-74, E-mail g_ss@rambler.ru

Аннотация. Рассмотрена аналитическая теория и компьютерная модель квантованного по уровню случайного сигнала. В ходе аналитических и численных расчетов получены реализации, корреляционные и спектральные характеристики сигнала. Уточнен физический смысл величин, характеризующих статистику переключений многоуровневого сигнала, и получено хорошее согласие между аналитической и численной моделями сигнала. Результаты расчетов использованы при создании новой компьютерной модели $1/f$ флуктуаций эмиссионного тока.

Одно из центральных мест в курсах “Статистическая радиотехника”, “Теория электрической связи”, “Теоретическая радиотехника”, “Системы и сети передачи дискретных сообщений”, “Цифровая обработка сигналов” и др. занимают вопросы, связанные с рассмотрением статистических и спектральных характеристик двухуровневого и многоуровневого сигналов [1-3]. Развитие статистической теории m -уровневого сигнала со случайными переходами в основном было завершено более тридцати лет тому назад [2-4]. Однако в силу ряда методических причин вопросы, связанные с выбором адекватной статистики, расчетами спектральных и корреляционных характеристик многоуровневого сигнала, недостаточно полно и корректно освещены в литературе

В настоящее время в связи с широким распространением быстродействующих компьютеров появилась весьма привлекательная возможность создания универсальной компьютерной модели и программного обеспечения, позволяющего наглядно наблюдать в динамике реализации m -уровневого случайного сигнала с произвольной статистикой, его спектральные и корреляционные характеристики, а также - влияние мультипликативной и аддитивной помех в виде белого и розового шума. Обозначенная выше задача была успешно реализована в БашГУ путем создания соответствующего программного и учебно-методического обеспечения лабораторных практикумов.

1. МОДЕЛЬ ДВУХУРОВНЕВОГО СИГНАЛА

При изучении теории двухуровневого сигнала обычно удается рассмотреть лишь некоторые частные случаи, соответствующие той или иной статистике переключения. Кроме этого предполагается, что сигнал является квазистационарным, и на него не накладываются какие-либо помехи и шум. Рассмотрим некоторые проблемы, связанные с полнотой и корректностью изложения аналитической теории телеграфного сигнала [2]. Соответствующие предположения или ограничения, проверку которых целесообразно осуществлять с применением компьютерной модели, будем сопровождать знаком (?). Учитывая дискретный характер телеграфного сигнала, при вычислении его автокорреляционной функции (АКФ) $B(t, \tau)$ интегрирование заменяем суммированием. Для несимметричного сигнала, представляющего собой чередование нулей и единиц, имеем

$$\overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \sum \sum x(t) \cdot x(t + \tau) P(x(t), x(t + \tau)) = 0 \cdot 0 \cdot P(0,0) + 0 \cdot 1 \cdot P(0,1) + 1 \cdot 0 \cdot P(1,0) + 1 \cdot 1 \cdot P(1,1) = P(1,1) \quad (1)$$

Очевидно, что $P(1,1)$ определяется произведением вероятности $P(1)$ на вероятность того, что за время τ сигнал совершил четное число переходов

$$P(1,1) = P(1) \cdot P(k_{\text{четн}}, \tau) \quad (2)$$

Будем полагать, что вероятности нахождения сигнала в 0 и в 1 одинаковы (1-й ?), т.е. $P(1) = P(0) = 0.5$. При расчете вероятности четного количества переходов полагаем, что последовательность значений времен τ нахождения сигнала в определенном состоянии подчиняется пуассоновской статистике (2-й ?). Имеем

$$P(k_{\text{четн}}, \tau) = \sum_{\substack{k=0 \\ k-\text{четное}}}^{\infty} \frac{|\alpha \cdot \tau|^k}{k!} \cdot e^{-|\alpha\tau|} \quad (3)$$

где α - количество переходов (3-й ?) в единицу времени. В связи с тем, что аргумент τ для АКФ может быть положительным и отрицательным, в (3) использовано абсолютное значение от τ .

Преобразуем (3) к следующему виду

$$P(k_{\text{четн}}, \tau) = \frac{1}{2} \cdot [1 + e^{-2|\alpha\tau|}] \quad (4)$$

Подставляем (4) в (2), и, учитывая, что $\bar{x} = 0.5$, имеем $B(t, \tau) = \frac{1}{4} \cdot e^{-2|\alpha\tau|}$ (5)

Для нахождения спектральной плотности мощности (СПМ) $S(f)$ используем теорему Винера-Хинчина

$$S(f) = 4 \cdot \int_0^{\infty} B(\tau) \cdot \cos(2\pi f\tau) \cdot d\tau = \frac{0.5 \cdot \alpha^{-1}}{1 + (\omega/2\alpha)^2} \quad (6)$$

Применение компьютерной модели двухуровневого позволяет существенно продвинуться в понимании смысла величины α в формулах (3-6). На рис.1 изображены расчетная реализация в 4096 точек длительностью в 1 с (верхняя кривая) и СПМ (кривая 2) двухуровневого сигнала при $\alpha = 100 \text{ с}^{-1}$ с аддитивным БГШ небольшой интенсивности.

Видно, что расчетная СПМ двухуровневого сигнала хорошо согласуется с (7), если под α понимать частоту парных переключений сигнала. Наличие аддитивного БГШ проявляется на СПМ на высоких частотах в виде пологого участка кривой.

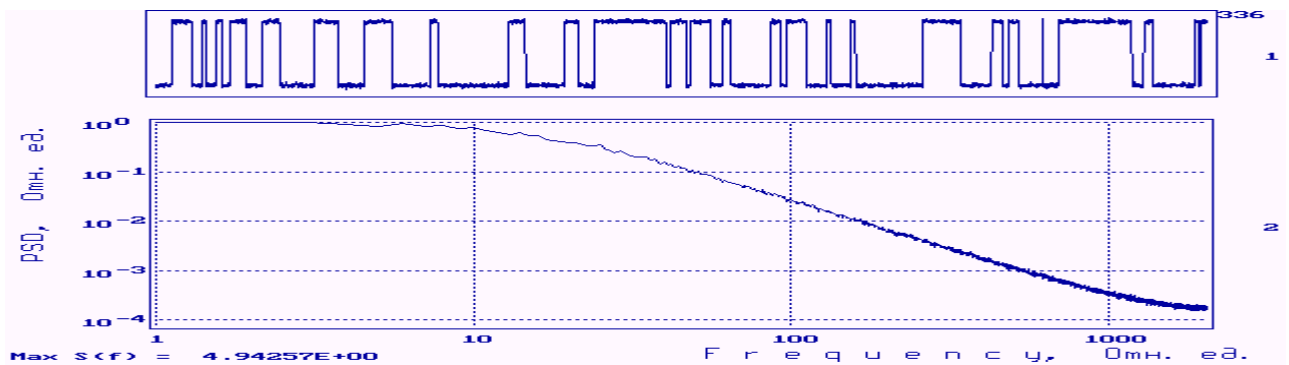


Рис.1. Реализация и СПМ двухуровневого сигнала.

2. МОДЕЛЬ МНОГОУРОВНЕВОГО СИГНАЛА

Следуя [3], представим многоуровневый случайный сигнал $x(t)$ как сумму статистически независимо (4-й ?) появляющихся в случайные моменты времени t_k прямоугольных импульсов амплитудой a_k и длительностью v_k

$$x(t) = \sum_k a_k \cdot G\left(\frac{t-t_k}{v_k}\right), \quad (7)$$

где $G(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{если } t < 0, t > 1 \end{cases} \quad (8)$

АКФ одиночного прямоугольного импульса длительностью v

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\theta) \cdot G\left(\theta + \frac{\tau}{v}\right) \cdot d\theta = \begin{cases} 0 & \vartheta < \tau \\ 1 - \frac{|\tau|}{\vartheta} & \vartheta > \tau \end{cases} \quad (9)$$

Для функции распределения $F(\tau)$ по всем возможным значениям длительностей импульсов τ можно записать (5-й ?) следующее дифференциальное уравнение [5]

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau} = \frac{[1 - F(\tau)]}{T}, \quad (10)$$

где T - среднее время пребывания сигнала в каждом состоянии. Решение (10) дает выражение для плотности вероятности $w(\tau)$ распределения длительностей импульсов

$$w(\tau) = \frac{e^{-\tau/T}}{T} \quad (11)$$

Усреднение (9) по (11) позволяет получить АКФ многоуровневого сигнала

$$B(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \quad (12)$$

С помощью соотношения Винера-Хинчина определяем СПМ сигнала

$$S(\omega, T) = \frac{\sigma^2 \cdot T}{\pi \cdot (1 + \omega^2 \cdot T^2)} \quad (13)$$

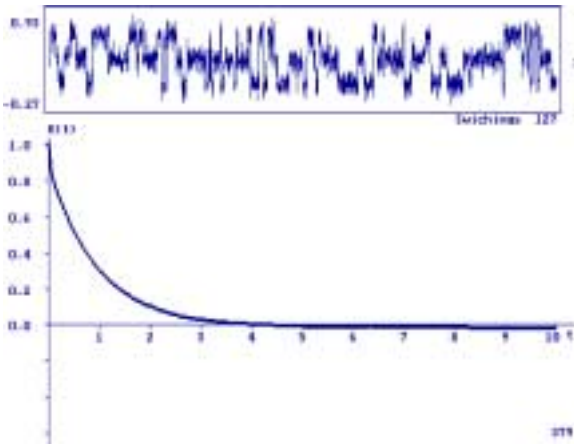


Рис.2. АКФ трехуровневого сигнала с БГШ

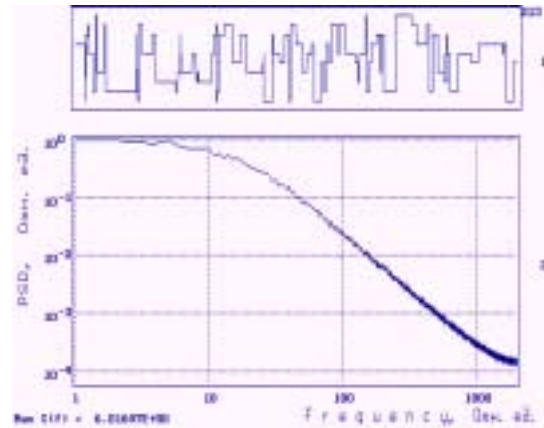


Рис. 3. Реализация и СПМ 10-уровневого сигнала

В отличие от представленной выше аналитической модели рассматриваемая численная модель многоуровневого сигнала жестко не связана с определенной статистикой переключения. В связи с этим разработанная модель позволяет дать ответы на все поставленные выше вопросы и убедиться в хорошем согласии численных расчетов с теоретическими зависимостями (12) для АКФ и (13) для СПМ. В частности, характеристики АКФ и СПМ не зависят от числа уровней квантования сигнала. На рис.2 приведена одна из реализаций трехуровневого сигнала с аддитивным гауссовским шумом (кривая 1) и расчетная АКФ (кривая 2). Наличие БГШ проявляется на АКФ в виде круто убывающего участка кривой вблизи нулевого аргумента. Для ненулевых значений аргумента форма АКФ качественно хорошо согласуется с аналитической зависимостью (12).

На рис.3 приведена одна из реализаций и усредненная по 200 реализациям СПМ случайного сигнала, квантованного по 10 уровням. Среднее число переключений на одну реализацию выбрано равным 100. Анализ приведенного спектра свидетельствует о том, что его форма, а также численное значение частоты перегиба хорошо согласуются с формулой (13). Это свидетельствует о полном соответствии расчетных реализаций многоуровневого сигнала с рассмотренными аналитическими моделями.

Литература

1. Теория электрической связи. / Под ред. Д.Д.Кловского. М.: Радио и связь. 1998. 432 с.
2. Назаров В.Н., Кувшинов Б.И., Попов О.В. Теория передачи сигналов. М.: Связь, 1970. 368 с
3. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. ч.1. М.: Наука. 1976. 494 с.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука. 1970. 720 с
5. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. М.: Мир. 1989. 376 с.

COMPUTER MODELING OF MULTIPLE QUANTIZATION RANDOM SIGNAL

Ghots S.

Bashkir State University, Department of Physical Electronics
 32, Frunze street, Ufa, Russia, 450074
 Phone: (3472) 23-65-74, E-mail g_ss@rambler.ru

Abstract. This report has deals with theory and computer model of quantum signal. Realizations and spectra of random signal with multiple levels were received during theory simulation and numerical calculations. There was defined more exactly the physical meaning of a coefficient that determine the frequency of switching and statistics of a two-levels and a multi-levels random signal. As result of this investigations a good agreement was got between the analytical and the numerical models of signal. This theory was fond application in model of emission current 1/f fluctuations.

In this report consider theory and computer models of two-level random signal and multiply levels quantum signal.

Following [3], will present random quantum signal $j(t)$ as a sum of statistical independently coming up for random moments of time t_k square-wave pulses by amplitude a_k and duration v_k

$$j(t) = \sum_k a_k \cdot G\left(\frac{t-t_k}{v_k}\right), \quad (1)$$

$$\text{where } G(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{если } t < 0, t > 1 \end{cases}. \quad (2)$$

ACF of the square-wave single pulse, that has duration v , give equation

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\theta) \cdot G\left(\theta + \frac{\tau}{v}\right) \cdot d\theta = \begin{cases} 0 & v < \tau \\ 1 - \frac{|\tau|}{v} & v > \tau \end{cases} \quad (3)$$

For function of distribution $F(\tau)$ on all possible means τ of pulses duration possible to write following differential equation [5]

$$\frac{dF(\tau)}{d\tau} = \frac{[1-F(\tau)]}{T}, \quad (4)$$

where T - average time of stay in each condition. Decision (4) gives following expression for density of probability $w(\tau)$ of pulses duration distribution

$$w(\tau) = \frac{e^{-\tau/T}}{T} \quad (5)$$

Averaging (3) on (5) allows getting ACF of quantum signal

$$B(\tau) = \sigma^2 \cdot \exp\left(-\frac{\tau}{T}\right) \quad (6)$$

By Wiener-Khintchine theorem define PSD of m-level signal

$$S(\omega, T) = \frac{\sigma^2 \cdot T}{\pi \cdot (1 + \omega^2 \cdot T^2)} \quad (7)$$

The Expressions (5) and (7) shows that the ACF and the PSD for quantum signal does not depend on number of the quantum levels.

In opposite to presented in previous section of analytical model considered numerical model of quantum signal hard unconnected with the signal switchings statistics. Developed model allows making sure in get a good agreement between numerical calculations and theoretical dependency (6) for ACF and (7) for PSD. In particular, how the calculations have shown, features ACF and PSD well corresponded to eq. (6) and eq. 7 respectively.