ВОССТАНОВЛЕНИЕ КОНЕЧНОЙ ВЫБОРКИ РАВНООТСТОЯЩИХ ОТСЧЕТОВ

Легович Ю.С., Рождественский Д.Б.

Институт проблем управления им. Трапезникова РАН
Россия, 117997, Москва, Профсоюзная ул., 65
E-mail: legov@ipu.rssi.ru

Пусть функция $y(t)$ ограничена и имеет ограниченный спектр. Следовательно, она непрерывна на бесконечности. Рассмотрим произведение функции $y(t)$ на прямоугольное окно. Это произведение имеет бесконечный спектр - бесконечность спектра обусловлена прямоугольным окном. Конечные пределы выборки нарушают условие ограниченности спектра. В случае конечной выборки наблюдаются искажения спектра, связанные с «растеканием» спектра и эффектом «наложения частот»; спектр конечной выборки дискретного процесса превышает частоту Найквиста. Спектр восстановленной функции, в том числе и по теореме отсчетов, отличается от спектра функции $y(t)$. Для восстановления дискретного процесса должен быть восстановлен и спектр. В соответствии с теорией рядов Фурье требование восстановления спектра является *необходимым и достаточным* условием восстановления дискретного процесса.

Явление Гиббса возникает как из-за «растекания» спектра, так и из-за эффекта «наложения частот». Отсюда следует, что колебания Гиббса могут проявляться не только при аппроксимации с помощью рядов Фурье.

Как известно, способ борьбы с «наложением частот» заключается в ограничении спектра. В случае конечной выборки причиной расширения спектра является прямоугольное окно. Следовательно, прямоугольное окно, как традиционный способ формирования конечной выборки, не является оптимальным и всегда приводит к искажениям. Для устранения эффекта «наложения частот» в качестве окна следует использовать функцию, ограниченную по спектру. При этом спектр произведения функции $y(t)$ на окно с ограниченным спектром не должен превышать частоту Найквиста. Задачей восстановления будем считать восстановление функции $y(t)$, а не произведения функции $y(t)$ на прямоугольное окно, как это общепринято. Как следует из вышеизложенного, определенный интерес представляет произведение двух функций, ограниченных по спектру. Функцию, ограниченную по спектру можно представить в виде

$$y(t) = \sum_{i=1}^{I} A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \qquad (1)$$

где I – конечно.

Рассмотрим произведение двух ограниченных по спектру функций $F = Q$ x H, которое, согласно (7), можно представить в виде:

$$\sum_{i=1}^{I} a_i \cos(\omega_i t + \varphi) \sum_{j}^{J} c_j \cos(\Omega_j t + \psi) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i}^{I} \sum_{j}^{J} a_i c_j \left\{ \left[\cos(\omega_i + \Omega_j) t + \alpha \right] + \cos\left[(\omega_i - \Omega_j) t + \beta \right] \right\}, \qquad (2)$$

$\alpha = \varphi + \psi$, $\beta = \varphi - \psi$; (индексацию фаз исключим), I и J - конечны. Как следует из (2) спектр произведения двух функций ограничен и характеризуется симметричной формой спектральных линий. Один из сомножителей (2) может быть представлен в виде

$$\sum_{i=1}^{I} a_i \cos(\omega_i t + \varphi) = \frac{\frac{1}{2} \sum_{i}^{I} \sum_{j}^{J} a_i c_j \left\{ \left[\cos(\omega_i + \Omega_j) t + \alpha \right] + \cos\left[(\omega_i - \Omega_j) t + \beta \right] \right\}}{\sum_{j}^{J} c_j \cos(\Omega_j t + \psi)}. \qquad (3)$$

Выражение (3) позволяет сделать следующий вывод. Если известны произведение двух функций F и один из сомножителей Q (делитель), то делимое (неизвестная функция H) может быть получено путем деления $H = \frac{F}{Q}$. При дискретном представлении функций выражение (3) справедливо и для восстановленных значений только в том в том случае, когда спектры функций ограничены, и спектр произведения не превышает частоту Найквиста. Выражение (3) будет использовано для получения алгоритма восстановления для случая задания исходной функции в виде конечной выборки равноотстоящих отсчетов.

В дальнейшем нам понадобится выражение дискретногопреобразования Фурье (ДПФ) со сплошным спектром. Остановимся на его получении.

Запишем пару ДПФ в виде

$$y(d) = \sum_{i=-N}^{N} C_i e^{j\frac{2\pi}{2N+1}id} \ ,$$

$$C_i = \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} y(n) e^{-j\frac{2\pi}{2N+1}in} \ .$$

Здесь $d = \dfrac{t}{\Delta\tau}$ - безразмерное время, $2N+1$ – число отсчетов конечной выборки.

Вклад отсчета n в аппроксимирующий ряд представим выражением

$$\Delta y(d) = \frac{y(n)}{2N+1}\frac{\sin\pi(d-n)}{\sin\pi\dfrac{d-n}{2N+1}} \ . \qquad (4)$$

Переход к ДПФ со сплошным спектром может быть выполнен так же, как и переход от ряда к интегралу Фурье. Первый этап перехода – неограниченное увеличение числа отсчетов путем добавления нулевых отсчетов за пределами задания конечной выборки.

При этом спектр переходит в сплошной, ограниченный пределами частоты Найквиста $-\omega_H \div \omega_H$.

Вклад отсчета n в ряд, согласно (4), при неограниченном увеличении числа отсчетов $2N+1 \to \infty$ и сохранении интервала между ними $(\Delta\tau)$ переходит в:

$$\lim \Delta y(d) = \lim y(n)\frac{\sin\pi(d-n)}{(2N+1)\sin\pi\dfrac{d-n}{2N+1}} = y(n)\frac{\sin\pi(d-n)}{\pi(d-n)} \ .$$

Сумма вкладов всех отсчетов равна

$$y(d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)\frac{\sin\pi(d-n)}{\pi(d-n)} \ . \qquad (5)$$

Перейдя к физическому времени $t = \Delta\tau d$, получим известное выражение теоремы отсчетов (теоремы Котельникова [1])

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n\Delta\tau)\frac{\sin\omega_H(t-n\Delta\tau)}{\omega_H(t-n\Delta\tau)} \ .$$

Впервые этот ряд упоминался в работах Уиттекера в 1915г. и назывался кардинальным рядом Уиттекера [2,3].

Для того чтобы представить рядом (5) процесс, заданный конечным числом отсчетов ($2N+1$), достаточно ввести в (5) конечные пределы

$$y(d) = \sum_{n=-N}^{N} y(n)\frac{\sin\pi(d-n)}{\pi(d-n)} \ . \qquad (6)$$

Этому соответствует добавление к исходным отсчетам неограниченного числа отсчетов с номерами $n < -N$ и $n > N$ и нулевыми значениями. Ряд (12) называется конечным рядом Уиттекера (КРУ), или конечным рядом Котельникова (КРК).

Таким образом, ряд Уиттекера (Котельникова) является аналогом интеграла Фурье для дискретного задания функции.

Хотя приемы перехода от ряда Фурье к интегралу и от ДПФ к КРУ схожи, результаты их различны:

- бесконечным спектром интеграла Фурье определяется процесс конечной длительности, заданный непрерывно на конечном интервале;
- конечным спектром КРУ определяется процесс бесконечной длительности, заданный дискретно конечным числом отсчетов (в последнем нет противоречий, так как восстановленный КРУ процесс равен нулю в моменты отсчетов за пределами интервала задания).

Сформулируем условия восстановления конечной выборки, заданной в виде равноотстоящих отсчетов.

Теорема.

Пусть функция *y*(*t*) непрерывна, ограничена и имеет ограниченный спектр (существует на бесконечном интервале). Пусть задано счетное количество (2*N* +1) ее равноотстоящих отсчетов *y*(*n*) = $y(t_n)$ в моменты времени t_n. Тогда найдутся такие действительные b_n, что она может быть восстановлена с любой конечной точностью с помощью выражения

$$y\ (d)=\frac{\sum\limits_{n=-N}^{N} y(n)\,b_n\,\dfrac{\sin\pi(d-n)}{(d-n)}}{\sum\limits_{n=-N}^{N} b_n\,\dfrac{\sin\pi(d-n)}{(d-n)}}\,. \qquad (7)$$

Здесь $d=\dfrac{t}{\Delta\tau}$, $n=\dfrac{t_n}{\Delta\tau}$ - безразмерное время, $\Delta\tau$ - интервал дискретизации.

Доказательство.

Запишем равенство $y(t_n)=\dfrac{y(t_n)b_n}{b_n}$, где b_n- весовые коэффициенты, число которых равно количеству (2*N* +1) отсчетов конечной выборки. Введем символ операции интерполяции Int{ $y(n)$}, и запишем новое равенство

$$y(n)=\frac{Int\{y(n)b_n\}}{Int\{b_n\}}\,. \qquad (8)$$

Данное выражение справедливо, так как по определению понятия интерполяция любая интерполяционная кривая должна проходить через все отсчеты.

Выберем коэффициенты b_n так, чтобы спектр $S(\Omega)$ функции $Int\{b_n\}$ был ограничен:

$$S(\Omega)=\begin{Bmatrix} S(-\Omega)=S(+\Omega) & при\ |\Omega|<\Omega_c \\ 0 & при\ |\Omega|\geq\Omega_c \end{Bmatrix}, \qquad (9)$$

где Ω_c - частота среза, Ω - непрерывна и лежит в интервале от $-\infty$ до $+\infty$.

Из (8) следует равенство

$$y(n)\,Int\{b_n\}=Int\{y(n)\,b_n\} \qquad (10)$$

Так как *y*(*n*) являются отсчетами функции *y*(*t*) с ограниченным спектром, то спектр функции $Int\{y(n)\,b_n\}$, представляющий свертку спектров функции *y*(*t*) и функции $Int\{b_n\}$, также ограничен, а его спектральные линии имеют форму, равную форме спектра функции $Int\{b_n\}$.

Выберем интервал дискретизации $\Delta\tau$ таким, чтобы спектр $Int\{y(n)\,b_n\}$ не превышал частоту Найквиста $f_H=\dfrac{1}{2\Delta\tau}$. В этом случае спектр функции $Int\{y(n)\,b_n\}$ не искажен эффектом «мимикрии частот», а для функций $Int\{y(n)\,b_n\}$ и $Int\{b_n\}$ справедливо равенство (9) при любых $d=\dfrac{t}{\Delta\tau}$

$$y(d)=\frac{Int\{y(n)b_n\}}{Int\{b_n\}}\,. \qquad (11)$$

Спектр *y*(*d*) совпадает со спектром *y*(*t*). В качестве алгоритма интерполяции воспользуемся выражением для конечного ряда Уиттекера (12). Теорема доказана.

Следствия из теоремы. Теорема справедлива при выполнении условия (9), в частности должно соблюдаться равенство $S(\Omega)=0$ при $|\Omega|\geq\Omega_c$. Т.е. должны быть полностью исключены боковые лепестки спектра функции $Int\{b_n\}$. На практике полностью исключить лепестки невозможно, но значительно подавить их амплитуду можно. Таким образом, точность восстановления с помощью выражения (7) определяется степенью подавления боковых лепестков функции $S(\Omega)$.

Расчет коэффициентов взвешивания b_n совпадает с методами расчета коэффициентов цифровых фильтров, и эти методы хорошо известны.

С помощью условия (9) можно рассчитать условие достаточности количества отсчетов n_l на высшую гармонику ω_l исходного ряда, например, для случая использования чебышевсних фильтров.

Частотная характеристика чебышевского фильтра может быть представлена следующим образом:

$$D(\alpha)=\frac{T_m(K\cos\alpha)}{T_m(K)},$$

где $T_m(x)=\begin{cases}\cos(m\arccos x) & при \ |x|\le 1\\ ch(march\,x) & при \ |x|>1\end{cases}$; $\alpha=\frac{\omega\Delta\tau}{2}$; *m* – порядок полинома Чебышева первого рода; *K* >1 - параметр, связывающий частоту среза, задержку и коэффициент подавления в полосе среза.

Условие *достаточности* количества отсчетов получено из условия касания главного лепестка составляющей ω_l частоты Найквиста ω_H [4].

$$n_l=\frac{2\omega_H}{\omega_l}=\frac{2}{1-\frac{2}{\pi}\arccos\frac{1}{K}},$$

где $K=\dfrac{1}{\cos\frac{\Omega_c\Delta\tau}{2}}$.

При использовании фильтров другого типа выражение для условия достаточности определяется из характеристик применяемого фильтра.

Литература

1. *Котельников В.А.*, О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи. – Радиотехника, 1999г., № 4-5.

2. *А. Дж. Джерри.,* Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор. – ТИИЭР, т.65 №11, стр. 53-89, 1977.

3. *J.M. Whittaker,* The Fourier theory of the cardinal functions. Proc. Math. Soc. Edinburgh, vol.1, pp 169-176, 1929.

4. *Рождественский Д.Б., Рождественский А.Е., Котельников А.Д.,* Математические технологии в численной экстраполяции. – Наукоемкие технологии, 2001, Т3, №2.