ФОРМИРОВАНИЕ ХАОТИЧЕСКИХ КОДОВ НА ОСНОВЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Калинин В.И.

Институт радиотехники и электроники РАН
141120, Фрязино, пл. Введенского, 1, ФИРЭ РАН
Тел.: (095) 5269049, e-mail : kalinin@ms.ire.rssi.ru

Реферат: Получено дискретное представление хаотических сигналов в пространстве вложения конечной размерности для динамической системы с запаздыванием. Показано, что размерность пространства вложения превышает более чем в два раза фрактальную размерность хаотического аттрактора. Построено множество хаотических бинарных кодов с метрикой Хемминга. Обсуждаются метрические свойства множества хаотических кодов.

1. Введение

В последние годы проводятся интенсивные исследования в области создания беспроводных широкополосных систем связи с кодовым разделением абонентских каналов [1]. Функционирование широкополосных систем связи нового поколения (Wireless-Spread Spectrum-CDMA) основано на цифровой обработке сигналов. Методами цифровой обработки производится синтез большого ансамбля псевдослучайных кодов с нужными статистическими и групповыми свойствами. Известные способы формирования псевдослучайных бинарных кодов на основе последовательностей максимального периода и функций Уолша не отвечают в полной мере предъявляемым требованиям к групповым свойствам кодов. С увеличением длины кодов возрастает вероятность появления пар кодов, у которых совпадают длинные фрагменты. Нелинейные динамические системы с хаотическим поведением открывают новые возможности построения больших ансамблей случайных кодов произвольной длительности с хорошими статистическими и групповыми свойствами [2]. В работах [2-3] предложен простой математический алгоритм формирования хаотических бинарных кодов на основе сильно неравновесной динамики в автоколебательной системе с запаздыванием. В настоящей работе определяется наименьшая размерность дискретной математической модели с запаздыванием методом реконструкции нелинейной динамики и на основе дискретного хаотического алгоритма с запаздыванием производится синтез множества хаотических бинарных кодов произвольной длительности с заданными групповыми метрическими свойствами.

2. Реконструкция нелинейной динамики для системы с запаздыванием

Поведение многих динамических систем с запаздыванием определяется дифференциальным уравнением первого порядка общего вида

$$dx(t)/dt = \Phi[x(t); x(t-T); \mu] \tag{1}$$

где Φ есть нелинейный оператор, T - время запаздывания и μ - управляющий параметр. Каждое состояние динамической системы (1) задается непрерывной траекторией $x_k(\tau)$ на k-ом интервале времени $t=kT+\tau$ $(0<\tau\leq T)$ длительности T. Множество всех хаотических траекторий x_k длины T образует притягивающее множество-аттрактор $M(T)=\{x_k\}$ в бесконечномерное фазовое пространство $L^2(T)$ исходной системы (1). Введем в пространстве $L^2(T)$ среднеквадратическую метрику и полагаем ограниченной норму $\|x_k\| \leq B$ каждого вектора x_k.

Мы рассматриваем диссипативные динамические системы, для которых сжимается первоначальный объем в фазовом пространстве. Важным свойством диссипативных систем с запаздыванием является сходимость траекторий к конечномерным многообразиям в исходном фазовом пространстве [4-5].

Пусть хаотический аттрактор $M(T)=\{x_k\}$ с фрактальной размерностью D_c содержится в компактном многообразии M_D целой размерности $D\geq D_c$. Тогда хаотический аттрактор $M(T)=\{x_k\}$ может быть взаимно однозначно спроектирован на подпространство M_N с размерностью вложения $N \geq 2D+1$ согласно известной теореме о вложениях Такенса [4].

3. Дискретный алгоритм для расчета нелинейной динамики

Теорема о восстановлении нелинейной динамики в пространстве вложения утверждает существование взаимно однозначного и конечномерного отображения для исходной бесконечномерной системы (1). Пространство вложения M_N может быть построено из дискретных во времени отсчетов хаотической траектории

$$X_k=\{ x_k(h), x_k(2h),\ldots, x_k(Nh) \} \qquad h=T/N \qquad (2)$$

взятых с периодом дискретизации h на каждом интервале времени длиной T. Период дискретизации $h=T/(2D+1)$ определяется отношением времени запаздывания в системе к размерности вложения. Вектор с координатами $\{ x_k(h), x_k(2h),\ldots, x_k(Nh) \}^T$ лежит на диффеоморфном образе хаотического аттрактора в пространстве вложения M_N конечной размерности N.

Нелинейная функция для вычисления каждого последующего отсчета из конечного числа N предшествующих отсчетов находится в виде:

$$x_i= x_{i-1} + h\Phi[x_i ;x_{i-N} ;\mu] \qquad (3)$$

Разностное уравнение (3) с дискретным временем $t_i= t_0 + ih$ однозначно описывает сложное поведение исходной системы (1) в том случае, если размерность вложения N более чем в два раза превышает размерность хаотического аттрактора $N \geq 2D_C+1$.

Простой математический алгоритм для формирования хаотических бинарных кодов на основе нелинейной автоколебательной системы с запаздыванием предложен в работе [2] :

$$y_i = sign\{ \Phi[x_i] \}$$
$$x_i = exp(-h)x_{i-1} + (1 - exp(-h))sign\{ \Phi[x_{i-N}]\} \qquad (4)$$

Хаотические бинарные коды $\{y_i\}$, генерируемые нелинейным алгоритмом (4), относятся к классу случайных кодов, функция автокорреляции которых имеет один узкий пик и малые боковые выбросы.

4. Синтез множества хаотических кодов

Кодирование в широком смысле понимается как представление сообщений в форме удобной для передачи по каналу связи. Процедура кодирования состоит в том, чтобы осуществить взаимно-однозначное представление передаваемых сообщений n–мерными сигналами из избыточного множества M_n размерности n. Мощность множества M_n или количество различных кодовых последовательностей длительности n определяются величиной $C =b^n$, где b является основанием кода. Хаотические кодовые последовательности формируются математическим нелинейным алгоритмом с запаздывающим аргументом. В заданной области управляющих параметров порождающий алгоритм обладает сильно неравновесной хаотической динамикой. Каждое сообщение передается единственной и никогда не повторяющейся хаотической кодовой комбинацией из n двоичных символов.

Расстояние между произвольными бинарными кодами $Y_k = (y_{1k},y_{2k},\ldots,y_{nk})$ и $Y_l = (y_{1l},y_{2l},\ldots,y_{nl})$ в исходном пространстве M_n задается метрикой Хемминга $d(Y_k,Y_l)$, которая указывает на число позиций с несовпадающими символами для выбранной пары кодов. Синтез системы оптимальных хаотических кодов заключается в выборе по заданному критерию подмножества U_n из всего множества M_n хаотических кодов. Кодовым расстоянием выбранного подмножества U_n называется число

$$D = min\ d(Y_k,Y_l)$$

где минимум находится по всем расстояниям, определенным между кодами подмножества U_n. Кодовое расстояние подмножества U_n характеризуется удаленностью друг от друга двух самых близких кодовых последовательностей из этого подмножества.

Хаотические коды $Y_k = (y_{1k},y_{2k},\ldots,y_{nk})$ большой длительности n не повторяются. Анализ множества хаотических кодов показывает, что кодовое расстояние всего множества повышается по мере увеличения длины кода и стремится к величине, равной половине длины кода. Хаотические коды большой длительности распределяются в пространстве Хемминга таким образом, что становятся почти равноудаленными друг от друга на половину длины кода. Взаимное рассеяние хаотических кодов обусловлено сильной локальной неустойчивостью и последующим перемешиванием хаотических траекторий в исходной динамической системе с запаздыванием (4). Квазиэквидистантное распределение хаотических кодов при большой длительности свидетельствует о приближении групповых свойств кодов к оптимальным в смысле метрики Хемминга.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 01-02-17529 А , проект № 00-07-90147-В и проект № 01-07-90349 В).

Литература

1. Andrew J., Viterby. CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication. – New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
2. Ю.В. Гуляев, В.Я. Кислов, В.В. Кислов, Новый класс сигналов для передачи информации – широкополосные хаотические сигналы // ДАН. 1998. Т.359. № 6. С. 750-754.
3. Р.В. Беляев, В.И. Калинин, В.В. Колесов, Формирование шумоподобной несущей в системах связи с расширением спектра // Радиотехника и электроника, 2001, Т.46, № 2, С.214-223.
4. F. Takens. Detecting strange attractor in turbulence, Lecture Notes in Mathematics, 898, pp.366-381, 1981.
5. Ладыженская О.А. //ДАН. 1972.Т.205.Вып.2.С.318-322.

DIGITAL FORMING OF CHAOTIC CODES ON THE BASIS OF NONLINEAR DYNAMICS IN DELAYED SYSTEMS

Kalinin V.

Institute of Radioengineering and Electronics of Russian Academy of Sciences
Vvedensky sq., 1, IRE RAS, 141120, Frayzino, Moscow reg., Russia
Tel/Fax: +7-095-5269049/2038414, E-mail: kalinin@ms.ire.rssi.ru

The digital presentation of chaotic signals generated by the infinite dynamical system is obtained by orthogonal projecting onto the embedding subspace. It is shown that the embedding dimension exceeds two times the fractal dimension of chaotic attractor. The chaotic code sets of the Hemming metric is constructed. The metrical properties of chaotic code sets are discussed.

In the last time the active investigation are carried on the creation of the Wireless-Spread Spectrum-CDMA communication systems [1]. Wireless CDMA communication systems are based on the digital signal processing. The synthesis of the large power ensemble of pseudo random codes used in CDMA systems is produced by the numerical methods. In this paper we consider digital forming of chaotic codes on the basis of nonlinear dynamics in oscillating systems with delayed feedback.

In the phase space of dynamical system the chaotic trajectories are formed compact subsets of finite dimensions. A chaotic attractor of finite dimension may be reconstructed from a sampled time waveform of just one component of the state [2-3]. The aim of the present paper is to show that the digital representation of chaotic signals formed by the infinite dynamical system is possible in the embedding subspace.

This work is sponsored by the Russian Foundation for Basic Research under projects: № 01-02-17529 A , № 00-07-90147-B , № 01-07-90349 B).

References

1. Andrew J., Viterby. CDMA: Principles of Spread Spectrum Communication. – New York: Addison-Wesley Publishing Company, 1996.
2. F. Takens. Detecting strange attractor in turbulence, Lecture Notes in Mathematics, 898, pp.366-381, 1981.
3. O.A. Ladyzhenskay. Soviet Physics (Doklady). 1973. Vol.17.pp.647