

ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С УСЕЧЕНИЕМ ПО МОДУЛЮ*

Брюханов Ю.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, Советская, 14.
Тел/факс (0852) 305-319, e-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

Реферат. Исследованы процессы в фильтрах нижних и верхних частот с произвольным количеством уровней квантования с усечением по модулю результатов сложения. Рассмотрены свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии. Поведение системы характеризуется бифуркационной и вероятностной диаграммами. Получены выражения для расчетов наиболее вероятных режимов.

Цифровые рекурсивные фильтры первого порядка используются в современных системах передачи информации для последетекторной обработки сигналов. На их базе создаются фильтры нижних (ФНЧ) и верхних (ФВЧ) частот [1]. Фильтры первого порядка могут использоваться и для каскадной формы реализации фильтров высокого порядка. Специфическими для цифровых фильтров являются ошибки, обусловленные конечным числом двоичных разрядов в представлении чисел.

Цель данной работы – исследование процессов в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка, использующих представление чисел с фиксированной запятой, с произвольным количеством уровней квантования L результатов сложения в автономном режиме и при постоянном внешнем воздействии A . Полагается, что параметр фильтра a задается без ошибки, квантование осуществляется с усечением по модулю (имеющем место при представлении чисел в прямом и обратном кодах с усечением), переменные представляются в форме чисел с выравниванием справа (т.е. в виде целых чисел), а сумматор без учета эффектов квантования имеет характеристику с насыщением.

Колебания в рассматриваемых фильтрах описываются разностным уравнением

$$x(n+1) = f[ax(n) + A]$$

где функция f - характеристика сумматора. При использовании целочисленной арифметики шаг квантования равен единице, A - целое число, а характеристика с усечением по модулю и насыщением выражается функцией

$$f(\varphi) = \begin{cases} [\varphi] & \text{при } |\varphi| < N \\ N \text{sign} \varphi & \text{при } |\varphi| \geq N, \end{cases}$$

где $[\bullet]$ – целая часть числа, $N = (L-1)/2$. Области характеристики, соответствующие значениям $[\varphi]$, обозначим: $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$. Имеем в виду, что вследствие квантования в системе первого порядка возможны L состояний.

Введем $y(n) = x(n+1)$. Процессы рассматриваем на плоскости состояний (x, y) . Как и в [2], разобьем эту плоскость на области, которые обозначим, как и области характеристики сумматора. Граница областей $[\varphi], [\varphi] + \text{sign} \varphi$ выражается зависимостью $x = ([\varphi] + \text{sign} \varphi + A)/a$. Сама граница принадлежит области $[\varphi] + \text{sign} \varphi$. Процессы исследуем методом точечных отображений [3]. При этом функция последования имеет вид $y = f(ax + A)$. Задача исследования движений сводится к нахождению последовательности точечных отображений F отрезка $x \in [-N; N]$ в себя. Состояния равновесия рассматриваемой системы характеризуются простыми и двукратными неподвижными точками отображения F .

В общем случае в зависимости от начального состояния в системе возможны различные движения. Поскольку все L возможных начальных состояний равновероятны, введем понятие вероятности P движения B в виде $P(B) = m/L$, где m - количество начальных состояний, соответствующих этим движениям. Считая количество уровней квантования L произвольным,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования Российской Федерации

рассмотрим свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии A . Параметр фильтра выбирается в области устойчивости без учета эффектов квантования, т.е. $|a| < 1$.

В отсутствие внешнего воздействия A при $|a| < 1$ график функции последования пересекается с биссектрисой $y = x$ только в начале координат. Следовательно, при любых L единственным и устойчивым состоянием равновесия является начало координат. Это свидетельствует об отсутствии так называемой мертвой зоны фильтра при использовании квантования с усечением по модулю.

При наличии постоянного внешнего воздействия A график функции последования пересекает ось ординат в точке $y = A$, при этом $\varphi = A$. Рассмотрим случай $A > 0$.

Пусть $a > 0$ (цепь является ФНЧ). В качестве примера рассмотрим случай $A = 2$. При этом граница областей $[\varphi], [\varphi] + 1$ выражается зависимостью

$$x = \begin{cases} ([\varphi] - 1) / a & \text{при } [\varphi] \in [0; N - 1] \\ ([\varphi] - 2) / a & \text{при } [\varphi] \in [-N; -1]. \end{cases}$$

Диаграмма Ламерея для $L = 11$, $a = 3/5$ с обозначенными на ней областями функции последования показана на рис.1. Здесь график функции последования пересекается с биссектрисой при $x \in \{3; 4; 5\}$. Следовательно, при старте из точек $[x] \in [-5; 3]$ в системе устанавливается колебание с периодом $T = 1$ и амплитудой $X = 3$. Ниже это обозначается $T = 1(3)$. При старте из точек $x = 4$ и $x = 5$ имеем движения $T = 1(4)$ и $T = 1(5)$ соответственно. Поэтому вероятность колебания $T = 1(3)$ равна $9/11$. Ниже это обозначается $P(3) = 9/11$. Вероятности других возможных движений равны $P(4) = P(5) = 1/11$. Рассмотрение движений при $a \in (0; 1)$ позволяет построить бифуркационную (рис. 2) и вероятностную (рис.3) диаграммы фильтра. На рис.2 числа около отрезка $T = 1$ означают амплитуды колебаний. Рассмотрение колебаний для $a > 0$ и ряда значений L и A позволило установить следующие закономерности для наиболее вероятных значений величины X . В общем случае произвольного $1 < A < N$ на выходе фильтра имеем $x = X$, (т.е. имеем $T = 1(X)$), где $A \leq X < N$, если на диаграмме Ламерея точки $X - 1$ и X принадлежат области X . Это означает выполнение условия

$$(X \leq a(X - 1) + A < X + 1) \cap (X \leq aX + A < X + 1),$$

откуда следует

$$(X - A) / (X - 1) \leq a < (X + 1 - A) / X.$$

При тех же условиях имеем на выходе $x = N$, если на диаграмме Ламерея точка $N - 1$ принадлежит области N . Этому соответствует условие

$$a \geq (N - A) / (N - 1).$$

При $a \in (0; 1)$, $A \in \{1; N\}$ на выходе имеем соответственно $T \in \{1(1); 1(N)\}$. Пользуясь этими закономерностями, можно для любых L и A найти зависимость $X(a)$. Эту зависимость можно сравнить с идеальной при $L = \infty$, которая установлена в [4].

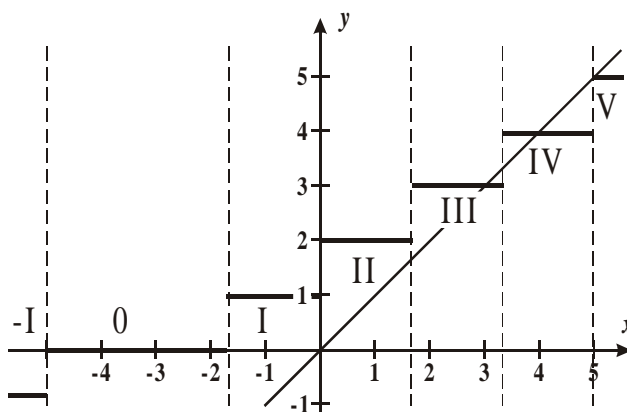


Рис. 1

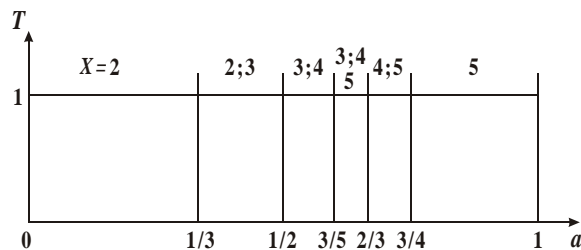


Рис. 2

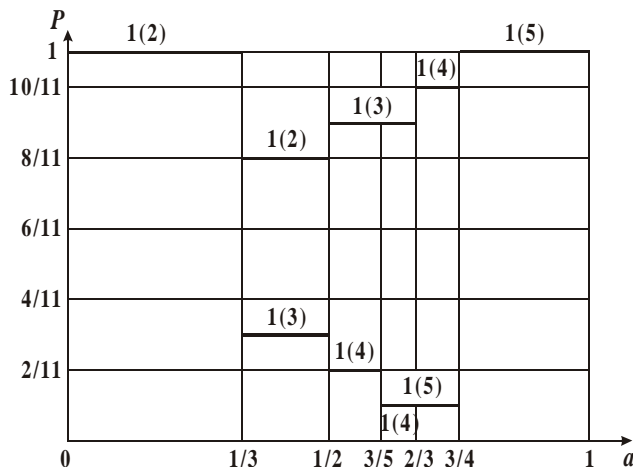


Рис. 3

Рассмотрение колебаний при $a < 0$ (цепь является ФВЧ) для ряда значений L и A позволило установить следующие закономерности для наиболее вероятных значений величины X . В общем случае произвольного $1 < A \leq N$ на выходе фильтра имеем $x = X$, (т.е. имеем $T = 1(X)$), где $1 \leq X < A$, если на диаграмме Ламерея точка X принадлежит области X , откуда следует

$$(X - A)/(X) \leq a < (X + 1 - A)/X. \quad (1)$$

Из области параметра a , определяемой (1), исключается область, удовлетворяющая условию, когда на диаграмме Ламерея точка $X - 1$ принадлежит области $X + 1$, а точка $X - 1$ области $X + 1$. Это означает выполнение условия

$$(X + 1 \leq a(X - 1) + A < X + 2) \cap (X - 1 \leq a(X + 1) + A < X),$$

откуда следует

$$(X + 1 - A)/(X - 1) \leq a < (X - A)/(X + 1). \quad (2)$$

Области параметра a , определяемой из (2), соответствуют колебания с периодом $T = 2$. Промежуточным по сравнению с (1) значениям a также соответствуют колебания с периодом $T = 2$. При $a \in (-1; 0)$, $A = 1$ в системе существует колебание $T = 2(1/0)$. Эти закономерности позволяют установить зависимость $X(a)$ для произвольных L и A . Эту зависимость можно сравнить с идеальной при $L = \infty$, которая рассчитывается с помощью методики, разработанной в [4].

Из-за симметричности характеристики сумматора колебания при $A < 0$ с периодом $T = 1$ отличаются только знаками амплитуд, а колебания с периодом $T = 2$ - только знаками мгновенных значений для совпадающих со случаем $A > 0$ значений параметра a . Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием.

Полученные закономерности нетрудно распространить и на случай, когда переменные представляются в форме чисел с выравниванием слева (т.е. в виде дробных чисел). Для этого достаточно ввести новую переменную $\bar{x} = xq$, где $q = 1/N$ - шаг квантования.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Брюханов Ю.А. Свободные колебания нелинейного осциллятора дискретного времени// Радиотехника и электроника. 1987. Т. 43. № 6. С. 677.
3. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1987.
4. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии// Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т. 7. № 4. С. 29.



EFFECTS OF QUANTIZATION IN DIGITAL FIRST ORDER RECURSIVE FILTERS WITH MODULUS TRUNCATION*

Bryuhanov Yu.

Yaroslavl State University
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaya st., 14.
Phone (0852) 30-53-19, E-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

Abstract. The processes in filters low and high frequencies with arbitrary quantity of quantizing levels with modulus truncation of addition results are investigated. The free oscillations and oscillations under a constant input signal level are considered. The expressions for calculations of the most probable modes are obtained.

The target of the given job is studied of processes in digital first order recursive filters of the operating representation of numbers with fixed point, with arbitrary quantity of quantizing levels L results of addition in an off-line mode and at a fixed external action A . It is necessary, that parameter of the filter a is set without an error, the quantization is carried out with modulus truncation (having a place at representation of numbers in direct and backward codes with truncation), variables are represented in the shape of numbers with alignment on the right (i.e. as integers numbers), and the adder without the effects of quantization has the characteristic with saturation.

The oscillations in this filters are featured by a difference equation:

$$x(n+1) = f[ax(n) + A].$$

where function f - is characteristic of the adder. Using integer arithmetics the quantizing interval is equal to unity, A - integer number, and the characteristic with modulus truncation and saturation express by function

$$f(\varphi) = \begin{cases} [\varphi] & |\varphi| < N \\ N \text{sign} \varphi & |\varphi| \geq N, \end{cases}$$

where $[\bullet]$ - whole part of number, $N = (L-1)/2$. Areas of the characteristics relevant to values $[\varphi]$, we will designate: $0, \square I, \square II, \dots, \square N$. We mean, that owing to quantization in a first order system are possible L conditions.

Let's enter $y(n) = x(n+1)$. Processes is viewed on a plane of conditions (x, y) . As well as in [1], we will dissect this plane on area, which we will designate, as well as area of the characteristic of the adder. Processes is explored by a method of point mappings [2]. Thus the function of a following has a view $y = f(ax + A)$. The research problem of motions is reduced to a presence of a sequence of point mappings F of cut $x \in [-N; N]$ itself. The conditions of equilibrium of a viewed system are characterized by simple and double nonmovable points of mapping F .

In absence of an external action A at $|a| < 1$ the schedule of following function is intercrossed with a bisector $y = x$ only in an origin of coordinates. Hence, at any L unique and stable conditions of

* The work has been carried out with financial support of Russian Foundation of Fundamental Research

equilibrium is the beginning of coordinates. It testifies to absence of so-called shadow of the filter at use of quantization with modulus truncation.

At presence of a fixed external action A the schedule of following function intercrosses an axis of ordinates in a point $y = A$, thus $\varphi = A$. The viewing of oscillations for $a > 0$ and row of values L and A has allowed to establish the following legitimacies for the most probable values of value X . Generally arbitrary $1 < A < N$ on an output of the filter we have $x = X$, (i.e. we have $T = 1(X)$), where $A \leq X < N$, if on the diagram Ламерея of a point $X - 1$ and X the areas X belong to. It means execution of a requirement

$$(X - A)/(X - 1) \leq a < (X + 1 - A)/X .$$

Under the same requirements we have on an output $x = N$, if on the diagram the point $N - 1$ belongs to to area N . It corresponds a requirement

$$a \geq (N - A)/(N - 1) .$$

At $a \in (0;1)$, $A \in \{1;N\}$ on an output we have accordingly $T \in \{1(1);1(N)\}$. Using these legitimacies, it is possible for any L and A to find dependence $X(a)$. This dependence can be compared with ideal at $L = \infty$, which sets in [3].

The viewing of oscillations at $a < 0$ for a row of values L and A has allowed to establish the following legitimacies for the most probable values of value X . Generally arbitrary $1 < A \leq N$ on an output of the filter we have $x = X$, (i.e. we have $T = 1(X)$), where $1 \leq X < A$, if on the diagram the point X belongs to to area X , when follows

$$(X - A)/(X) \leq a < (X + 1 - A)/X . \tag{1}$$

From area of parameter a , determined (1), the area fitting to a requirement is eliminated when on the diagram the point $X - 1$ belongs to to area $X + 1$, and point $X - 1$ - area $X + 1$. It means execution of a requirement

$$(X + 1 - A)/(X - 1) \leq a < (X - A)/(X + 1) . \tag{2}$$

The areas of parameter a , determined from (2), correspond to oscillations with a period $T = 2$. To intermediate in comparison with (1) values a also correspond oscillations with a period $T = 2$. At $a \in (-1;0)$, $A = 1$ in a system there is an oscillation $T = 2(1/0)$. These legitimacies allows to establish dependence $X(a)$ for arbitrary L and A . This dependence can be compared with ideal at $L = \infty$, which is calculated with the help of a procedure, designed in [3].

The obtained legitimacies are uneasy for distributing and to a case, when variable it are represented in the shape of numbers with alignment at the left (i.e. as fractional numbers). For this purpose it is enough to enter new variable $\bar{x} = xq$, where $q = 1/N$ - a quantizing interval.

References

1. Bryuhanov Yu.A. Free oscillations of a non-linear oscillator of discrete time // Radio Engineering and electronics. 1987. V. 43. N 6. P. 677.
2. Butenin N.V., Neymark Yu.I., Fufaev N.A. The introducing in the theory of non-linear oscillations. M.: Science, 1987.
3. Bryuhanov Yu.A. Oscillations in non-linear recursive first order circuits at a constant external influence // Tidings of high schools. Applied non-linear dynamics. 1999. V. 7. N 4. P. 29.