

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ПОРОЖДАЮЩИХ ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ВЕЙВЛЕТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Кириллов С.Н., Зорин С.В.

Рязанская государственная радиотехническая академия

В настоящее время широко применяются и интенсивно разрабатываются вейвлетные и вейвлетно-пакетные методы обработки нестационарных случайных процессов (СП). И те и другие основываются на разложении исходного СП по базисным функциям, обладающим как частотной, так и временной локализацией, что обуславливает их высокие аппроксимационные возможности. Строгая математическая теория, разработанная для определенных на всей действительной оси функциональных пространств, естественным образом распространяется и на дискретные СП. Более того, существуют быстрые и эффективные в вычислительном отношении алгоритмы, обеспечивающие возможность реализации таких преобразований на основе современных цифровых устройств.

Вейвлетные разложения (ВР) и вейвлетно-пакетные разложения (ВПР) производятся с помощью порождающих низкочастотного H_0 и высокочастотного H_1 цифровых фильтров, коэффициенты импульсных характеристик которых $h_0(i)$ и $h_1(i)$ связаны со скейлинг уравнением:

$$\varphi(x) = \sum_i h_0(i)\varphi(2x-i) \quad \text{и функциональным уравнением для вейвлетной функции:}$$
$$\psi(x) = \sum_i h_1(i)\varphi(2x-i). \quad \text{При этом ВПР осуществляются на основе схемы, представляющей собой}$$

каскадные соединения блоков, состоящих из двух фильтров H_0 и H_1 , называемых фильтрами анализа, а также двух дециматоров. Характер каскадных соединений задает конкретное ВПР, которому соответствует определенное разбиение частотно-временного диапазона СП. Существует множество вариантов ВПР, одному из которых соответствует ВР. Таким образом, для произвольного СП в соответствии с его частотно-временной структурой, может быть найден оптимальный по какому-либо критерию базис ВПР, определяющийся порождающими фильтрами H_0 и H_1 . Аппроксимационные свойства ВПР в значительной степени определяются характеристиками порождающих ВПР фильтров H_0 и H_1 .

Целью исследования является разработка методов синтеза оптимальных порождающих фильтров и алгоритмов вейвлет анализа (ВА).

К характеристикам порождающих фильтров предъявляются различные требования в зависимости от области применения соответствующих алгоритмов ВА. Так в задачах обработки речи в силу особенностей слухового восприятия человека высокие требования, накладываемые на форму спектра ВФ, обуславливают использование фильтров с большим числом нулевых моментов (15-20), что приводит к снижению быстродействия соответствующих алгоритмов ВА. Реализация фильтров H_0 и H_1 обычно осуществляется на основе нерекурсивных фильтров.

Исходя из этого, в целях уменьшения вычислительных затрат разработаны алгоритмы ВА и соответствующие им вейвлетные базисы, на основе рекурсивных фильтров анализа, обеспечивающих минимальную среднеквадратическую ошибку (СКО) восстановления СП. При этом решены задачи повышения вычислительной эффективности алгоритмов ВА при одной и той же ошибке восстановления – с одной стороны, и уменьшения ошибки восстановления при одних и тех же вычислительных затратах – с другой.

Так, при сжатии в два раза случайного низкочастотного сигнала, имеющего прямоугольный энергетический спектр: $H_s(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]; \\ 0, & \omega \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$, нормированная к мощности

исходного обрабатываемого СП ошибка восстановления, в случае предложенного алгоритма на основе рекурсивного фильтра составляет 3.77% (относительные вычислительные затраты (ОВЗ) пропорциональны 5-ти), в то время как для случаев фильтров Добеши, использующих 2 и 3 нулевых момента (ОВЗ пропорциональны 4-ем и 6-ти, соответственно) имеет величину 12.86% и 10.506%. При этом фильтры анализа могут быть представлены в виде:

$$H_0(z) = (h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3}) / (1 - \alpha_1 z^{-2}),$$
$$H_1(z) = (g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + g_3 z^{-3}) / (1 - \alpha_1 z^{-2}), \quad \text{где} \quad h_0 = A - \alpha_1 B, \quad h_1 = C - \alpha_1 D,$$

$$h_2 = -\alpha_1 A + B, \quad h_3 = -\alpha_1 C + D, \quad g_0 = -h_3, \quad g_1 = h_2, \quad g_2 = -h_1, \quad g_3 = h_0, \quad A = \cos(\beta_1)\cos(\beta_1 + \beta_2),$$

$$B = \sin(\beta_1)\sin(\beta_1 + \beta_2), \quad C = -\cos(\beta_1)\sin(\beta_1 + \beta_2), \quad D = \sin(\beta_1)\cos(\beta_1 + \beta_2).$$

Получены зависимости оптимальных параметров $(\alpha_1, \beta_1, \beta_2)$ по критерию СКО от числа отсчетов n импульсной характеристики рекурсивного фильтра по уровню 99.9% энергии. При этом минимальная ошибка имеет место в случае: $(\alpha_1, \beta_1, \beta_2) = (-0,61; -0,782; -0,785)$.

Отметим, что для получения ошибки восстановления $e=3.77\%$ в случае порождающих фильтров Добеши, необходимо использовать 23 нулевых момента, при этом число вычислительных операций возрастет в 9.2 раза по сравнению с предложенным алгоритмом.

Отличительной особенностью предложенного алгоритма является то, что прямое (обратное) преобразование существенно быстрее чем обратное (прямое) преобразование. Таким образом, реализация алгоритмов ортогонального ВА на основе рекурсивных фильтров особенно целесообразна в системах, где не требуется восстановления исходного сигнала (системы классификации, распознавания и идентификации сигналов), а также в системах, где требуется высокая вычислительная эффективность лишь только при одном из преобразований либо прямом, либо обратном (системы сжатия изображений, звука и речи в целях их хранения).

Для случая одинаковых требований к скорости вычисления как прямого, так и обратного преобразования разработаны алгоритмы биортогонального ВА на основе схемы лифтинга, где в качестве корректоров и предсказателей используются рекурсивные фильтры. Предложен вариант схемы лифтинга, который по сравнению с алгоритмами на основе биортогональных ВФ Когена-Добеши-Фово(2,6) и ортогональных ВФ Добеши (4-нулевых момента) обеспечивает в 1.5 раза меньшую дисперсию ошибки восстановления сигнала с прямоугольным спектром при одних и тех же вычислительных затратах.

При этом фильтры предсказания $s(z)$ и коррекции $t(z)$ имеют вид: $s(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1}}$,

$t(z) = \frac{c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2}}{1 - d_1 z^{-1}}$, а значения коэффициентов фильтров предсказания и коррекции

следующие: $a_0 = -0.671$, $a_1 = -1.067$, $a_2 = -0.325$, $b_1 = -0.706$, $c_0 = 0.471$, $c_1 = 0.242$, $c_2 = -0.125$, $d_1 = -0.455$.

Получено аналитическое выражение для дисперсии ошибки восстановления случайного стационарного сигнала при отбрасывании либо высокочастотных (ВЧ), либо низкочастотных (НЧ) его компонентов в случае биортогональных ВР. Предложено понятие эквивалентных НЧ и ВЧ фильтров, которое может быть использовано как для анализа уже существующих так и для синтеза новых биортогональных ВР. Разбиение частотного диапазона обрабатываемого СП на большее чем 2 число полос (ВА произвольной кратности) может быть осуществлено не только с помощью ВПР, но и с использованием системы бэнк-фильтров, удовлетворяющих условию точного восстановления.

Предложен метод синтеза вейвлетных базисов произвольной кратности по критерию минимума дисперсии ошибки восстановления при заданной корреляционной функции случайного процесса и длительности вейвлетной функции. Разработана процедура, существенно уменьшающая размерность вектора оптимизируемых параметров синтезируемого вейвлетного базиса, путем введения понятия "вспомогательного сигнала". Показана целесообразность использования синтезированных вейвлетных базисов для сжатия речевых сигналов, при этом по сравнению с ВПР на основе фильтров Добеши и локальными тригонометрическими базисами уменьшение дисперсии ошибки восстановления составляло от 1.5 до 5 раз в зависимости от формы конкретной корреляционной функции обрабатываемого СП.

Дополнительной возможностью уменьшения размерности вектора оптимизируемых параметров синтезированного вейвлетного базиса является использование бэнк-фильтров, модулируемых косинусом. Синтезированы для ряда конкретных реализаций различных фонем оптимальные по критерию минимума дисперсии ошибки восстановленного СП прототипные фильтры. При этом импульсные характеристики фильтров анализа могут быть получены путем модуляции импульсной характеристики прототипного фильтра косинусными функциями.

Частным случаем такого рода базисов являются локальные тригонометрические базисы, широко использующиеся и специально разработанные для сжатия изображений. Получены оптимальные по критерию СКО восстановления СП локальные базисы для ряда корреляционных функций, соответствующих различным фонемам. При синтезе оптимальных по заданному критерию локальных и модулированных косинусом базисов необходимо оптимизировать вектор параметров значительно меньшей размерности, чем в общем случае вейвлетных базисов произвольной кратности. При этом проигрыши по СКО восстановления СП по сравнению с общим случаем вейвлетных базисов произвольной кратности в среднем составляют от 3 до 30% в зависимости от формы конкретной корреляционной функции обрабатываемой фонемы.

SYNTHESIS OF OPTIMAL GENERATING FILTERS FOR WAVELET DECOMPOSITION

Kirillov S., Zorin S.

Wavelet and wavelet packet methods of stochastic non stationary signals processing are widely developing and intensively used in this time. Wavelet and wavelet packet transforms can be performed by using two quadrature mirror filters H_0 and H_1 that satisfy the condition of perfect reconstruction. The sequences $h_0(i)$ and $h_1(i)$ corresponding to pulse functions of these filters determine wavelet and scaling functions through the following equations: $\varphi(x) = \sum_i h_0(i)\varphi(2x-i)$ and $\psi(x) = \sum_i h_1(i)\varphi(2x-i)$ respectively. Many properties of wavelet packet representations are defined by ones of filters H_0 and H_1 , so the questions of building and analysis of these filters are actual.

In order to reduce the computational complexity (CC) of the transform, the algorithms based on using recursive filters (RF) are proposed. While the CC is fixed the problem of minimization of mean square error (MSE) of restored signal (RS) is solved.

For example. At the compression of stochastic signal with energetic spectrum

$$H_s(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]; \\ 0, & \omega \in (\pi/2, 3\pi/2). \end{cases}$$

by factor of two, MSE is equal 3.77% in our case (CC is

proportional to five) as it is equal 12.86% and 10.506% in case of Daubechies filters with two and three vanish moments (CC are proportional to 4 and 6) respectively. Distinctive particularity of offered algorithms is that direct (inverse) transformation is much faster than inverse (direct) transformation. Thus, the implementation of orthogonal wavelet analysis (WA) algorithms on the basis of RF is specially expedient in systems that don't require restoring an original signal, and also in system where the high computer effectiveness is only required at either direct or inverse transformation.

For a case of the identical requirement to a speed of an evaluation both direct and inverse transformation the biorthogonal WA algorithms was designing, where the RF was used as update and predictor. The variant of the lifting scheme is offered. In that case when the original signal have a rectangular spectrum the MSE is in 1.5 times smaller than in case of Cohen-Daubechies-Feauveau filters (2.6) and Daubechies filters with 4 vanish moments at the same CC.

The frequency decomposition on greater than two numbers of bands (arbitrary multiplicity wavelet analysis (AMWA)) can be realized not only with usage wavelet packet analysis and also with usage of system of bank-filters. The method of synthesis AMWB by criterion of minimum of MSE is offered at given correlation function of treated signal and duration of wavelet function. The procedure must diminishing dimension of a optimized parameters vector (OPV) is designing by introducing concept of «supplementary signal». The expediency of these bases usage for compression of voice signals is shown, thus as contrasted to wavelet bases on basis of Daubechies filters and local trig bases the MSE diminution made from 1.5 up to 5 times depending on the shape of concrete correlation function of treated signal. An additional possibility of a diminution of OPV dimension is usage of bank-filters modulated by cosine that correspond to a particular case of AMWB. Prototype filters optimum by criterion of MSE are synthesized for a series of concrete implementations of different phonemes. The particular case of bases on basis of bank-filters modulated by cosine is a local trig bases widely using and specially designing for compression of the image. The locale bases for series of correlation functions appropriate to different phonemes are obtained by the same criterion as in another cases. At synthesis optimum local and modulated by cosine bases by given criterion it is necessary to optimize OPV of considerably smaller dimension than in case of general AMWB. Thus the loss on MSE of RS in proposed cases as contrasted to general case of AMWB make from 3 up to 30% depending on the shape of concrete correlation function of a treated phoneme.