

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ С РАВНОМЕРНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИЕЙ

Султанов Б.В., Щербаков М.А., Захаренков В.Е., Дорошкевич В.В.

Пензенский государственный университет
440017, Пенза, ул. Красная, 40, (841-2)52-37-08, mash@sura.ru

Большое разнообразие существующих вариантов построения цифровых систем фазовой синхронизации (ЦСФС) обусловило различные подходы к их классификации, представленные, например, в работах [1–3]. Не вдаваясь в подробное рассмотрение каждого из них отметим, что все они, несмотря на разницу в выборе классификационных признаков, предусматривают выделение в отдельную группу ЦСФС с аналого-цифровым преобразованием до петли фазовой автоподстройки со структурой, показанной на рис 1.

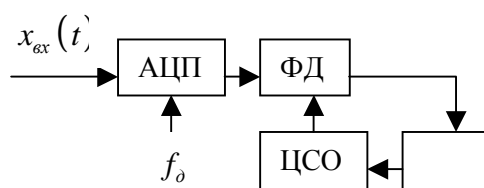


Рис. 1

В таких системах входной сигнал посредством многоуровневого аналого-цифрового преобразователя (АЦП), тактируемого с частотой, удовлетворяющей условию Котельникова, преобразуется в код, и дальнейшая обработка информации в петле фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), включающей фазовый дискриминатор ФД, цифровой фильтр ЦФ и цифровой синтезатор отсчетов ЦСО, осуществляется полностью в цифровом виде. Реальными, физически существующими во времени сигналами при этом являются входной, содержащий информацию о частоте и фазе задающего колебания, и последовательность тактирующих импульсов, следующих с частотой дискретизации $f_d = 2 \cdot \Delta f_{ex}$, где Δf_{ex} – ширина спектра предварительно отфильтрованной входной смеси $x_{ex}(t) = u(t) + n(t)$ задающего сигнала $u(t)$ с шумом $n(t)$. Задача ЦСФС заключается в формировании (вычислении) на каждом шаге дискретизации значения цифрового отсчета виртуального подстраиваемого выходного колебания, когерентного с задающим. Поскольку частота дискретизации подобных систем в процессе их работы остается фиксированной (не зависит от частоты входного и подстраиваемого колебаний), их называют также системами с равномерной дискретизацией [2, 3]. В настоящей работе рассматривается обобщенная модель ЦСФС данного класса и приводятся некоторые способы математического описания возможных вариантов реализации астатической системы второго порядка.

Предположим, что задающее колебание $u(t)$ является гармоническим с амплитудой $\sqrt{2} \cdot U$ и круговой частотой ω . При этом на входе ФД будет присутствовать дискретизированная смесь $x_{ex}[k] = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega_0 \cdot k + \varphi[k]) + n[k]$, где $\omega_0 = \omega / f_d$; k – номер текущего отсчета; $\varphi[k]$ – закон изменения фазы сигнала в дискретном времени; $n[k]$ – отсчеты дискретного белого гауссова шума с дисперсией σ^2 . В такой ситуации возможны два варианта построения ФД: 1) с перемножением отсчетов $x_{ex}[k]$ и поступающего с выхода ЦСО на второй вход ФД дискретного подстраиваемого колебания $\sqrt{2} \cdot S \cdot \cos(\omega_0 \cdot k + \hat{\varphi}[k])$ и последующей фильтрацией высокочастотных (имеющих частоту $2 \cdot \omega_0$) составляющих произведения посредством ЦФ [3]; 2) с формированием с помощью преобразователя Гильберта (ПГ) квадратурных компонент сигнала $x_{ex}[k]$ и последующей компенсацией высокочастотных составляющих [4].

Преимуществом второго варианта является то, что при его реализации фильтр (ПГ), определяющий степень подавления высокочастотных составляющих, оказывается не включенным в петлю регулирования. Это позволяет надлежащим образом выбрать его параметры, не изменяя других характеристик ЦСФС.

Для любого варианта выходной сигнал ФД $y_{\text{ФД}}[k]$ определяется выражением:

$$y_{\text{ФД}}[k] = \gamma \cdot \{ \sin(\psi[k]) + n_{\text{ш}}[k] \},$$

где $\gamma = U \cdot S$ соответствует ФД с ЦФ, а $\gamma = 2 \cdot U \cdot S$ – ФД с ПГ;

$$\psi[k] = \varphi[k] - \hat{\varphi}[k]; \quad (1)$$

$n_{\text{ш}}[k]$ – отсчеты дискретного белого гауссова шума с дисперсией $\sigma_{\text{ш}}^2 = \sigma^2 / (2 \cdot U^2)$.

В соответствии со схемой рис. 1 этот сигнал поступает на цифровой фильтр ЦФ с передаточной функцией $H_{\text{ЦФ}}(z)$. Выходной сигнал ЦФ $v[k]$ подается на ЦСО, где осуществляется его дискретное интегрирование (суммирование с накоплением) и формирование на основе полученного результата отсчетов подстраиваемого колебания [1]. Математической моделью этого блока является [2] звено с передаточной функцией $H_{\text{ЦСО}}(z) = z^{-1} / (1 - z^{-1})$.

Таким образом, полную модель ЦСФС рассматриваемого класса можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 2.

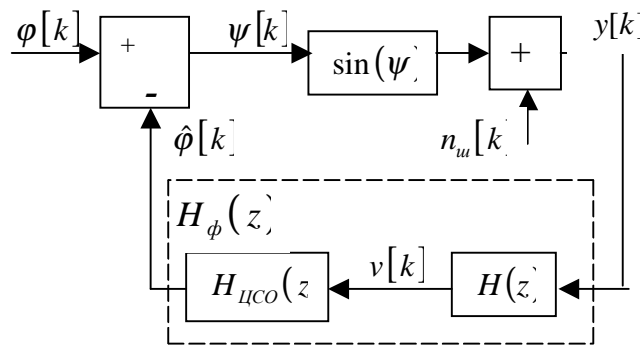


Рис. 2.

Функции $y[k]$ и $H(z)$ в этой схеме определяются как

$$y[k] = y_{\text{ФД}}[k] / \gamma; \quad (2)$$

$H(z) = \gamma \cdot H_{\text{ЦФ}}(z)$. Очевидно, что последовательному включению звена с комплексным коэффициентом передачи $H(z)$ и ЦСО соответствует эквивалентный петлевой фильтр с передаточной функцией $H_{\phi}(z) = H(z) \cdot H_{\text{ЦСО}}(z)$.

В астатической системе второго порядка в состав ЦФ должен входить дискретный интегратор, реализуемый, например, в виде описанного выше накапливающего сумматора. Традиционная конфигурация ЦФ в этом случае описывается уравнением [2]:

$$v[k] = \beta \cdot y[k] + \mu \cdot \sum_{i=0}^k y[i], \quad (3)$$

где коэффициенты β и μ будем полагать учитывающими масштабирование в ФД, т.е. $\beta = \beta_1 \cdot \gamma$; $\mu = \mu_1 \cdot \gamma$; $y[k]$ определяется (2). Переходя от $H_{\text{ЦСО}}(z)$ к временному описанию ЦСО [5] с учетом (3) получаем уравнение петлевого фильтра

$$\hat{\varphi}[k] = \hat{\varphi}[k-1] + \beta \cdot y[k-1] + \mu \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y[i]. \quad (4)$$

Используя (1), на основании (4) приходим к временному алгоритму ЦСФС:

$$\psi[k] - \psi[k-1] = \varphi[k] - \varphi[k-1] - \beta \cdot y[k-1] - \mu \cdot \sum_{i=0}^{k-1} y[i]. \quad (5)$$

Положим, что фаза задающего колебания $\varphi[k]$ изменяется по линейному закону $\varphi[k] = \omega_{0r} \cdot k$, где ω_{0r} – сдвиг круговой частоты входного сигнала относительно ω_0 . Тогда, вводя обозначение $r[k-1] = \mu \cdot \sum_{i=0}^{k-2} y[i] + \omega_{0r}$, временной алгоритм (5) рассматриваемой ЦСФС можно представить в виде системы разностных уравнений:

$$\begin{cases} \psi[k] = \psi[k-1] - (\mu + \beta) \cdot \sin(\psi[k-1]) - r[k-1] \\ r[k] = r[k-1] + \mu \cdot \sin(\psi[k-1]) \end{cases}$$

Еще один возможный вариант математического описания ЦСФС с фильтром, задаваемым уравнением (3), получим, вычислив z -преобразование от обеих частей равенства (4) и определив передаточную функцию петлевого фильтра

$$H_{\phi}(z) = \frac{\hat{\Phi}(z)}{Y(z)} = \frac{(\beta + \mu) \cdot z^{-1} - \beta \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}} = \frac{k1 \cdot z^{-1} + k2 \cdot z^{-2}}{1 - 2 \cdot z^{-1} + z^{-2}}, \quad (6)$$

которой соответствует временной алгоритм

$$\hat{\phi}[k] = 2 \cdot \hat{\phi}[k-1] - \hat{\phi}[k-2] + k1 \cdot y[k-1] + k2 \cdot y[k-2], \quad (7)$$

причем $k1 = \beta + \mu$; $k2 = -\beta$.

С учетом (1) на основании (7) получаем разностное уравнение рассматриваемой ЦСФС второго порядка в следующей форме:

$$\begin{aligned} \psi[k] - 2 \cdot \psi[k-1] + \psi[k-2] + k1 \cdot \sin(\psi[k-1]) + k2 \cdot \sin(\psi[k-2]) = \\ = \phi[k] - 2 \cdot \phi[k-1] + \phi[k-2] - k1 \cdot n_u[k-1] - k2 \cdot n_u[k-2]. \end{aligned} \quad (8)$$

Полученная модель показывает возможность построения петлевого фильтра, задаваемого (3), путем реализации его в виде звена, непосредственно выполняющего вычислительные операции, предписываемые алгоритмом (7).

Еще одним распространенным подходом к реализации петлевого фильтра является выполнение его на основе двух усредняющих устройств (УУ1 и УУ2) с фиксированными емкостями $N1$ и $N2$, называемых последовательными фильтрами [1, 2], со следующим алгоритмом функционирования. Выходной сигнал ФД подается на вход первого усредняющего устройства УУ1. В случае отсутствия ухода фазы и частоты подстраиваемого колебания значение числа в УУ1 изменяется в небольших пределах около нуля. При наличии сдвига фазы $\psi[k]$, фиксируемого ФД, на вход УУ1 поступают сигналы преимущественно одного знака. В результате модуль суммарного числа в УУ1 растет. При достижении им значения $N1$ сигнал переполнения УУ1, имеющий знак накопленной суммы, обеспечивает соответствующую коррекцию фазы выходного колебания ЦСО и одновременно поступает на вход УУ2. Многократное однонаправленное регулирование фазы в конечном итоге приводит к переполнению УУ2, при котором осуществляется соответствующая коррекция частоты выходного сигнала ЦСО на величину Δf . В работе [6] показано, что передаточная функция такого варианта реализации петлевого фильтра полностью совпадает с правой частью выражения (6) с той лишь разницей, что в данном случае коэффициенты k_1 и k_2 определяются как: $k1 = (2 \cdot \pi) / (N \cdot N1)$; $k2 = [2 \cdot \pi \cdot (N \cdot \Delta f - N2 \cdot f)] / (N \cdot N1 \cdot N2 \cdot f_0)$, где N – число отсчетов, представляющих период гармонического колебания в ЦСО. Поэтому математическая модель ЦСФС второго порядка с последовательными фильтрами также представляется в виде (8).

Полученные в работе результаты могут служить основой для анализа характеристик рассмотренного класса ЦСФС.

Литература

1. Цифровые системы фазовой синхронизации. / Под ред. М. И. Жодзишского. – М.: Сов. радио, 1980. – 208 с.
2. Линдсей У. Ч., Цзе Цзамин. Обзор цифровых систем фазовой автоподстройки частоты // ТИИЭР. – 1981. – Т. 69. – № 4. – С. 12 – 33.
3. Шахтарин Б.И., Губанов Д.А., Волчихин В. И. Моделирование и расчет цифровых систем фазовой синхронизации.- Учеб. пособие. – Пенза: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1996. - 60 с.
4. Султанов Б.В. Применение цифровых систем фазовой синхронизации для измерения сдвига частоты гармонического сигнала на фоне шума // Радиотехника. – 2000. - № 9. – С. 21 - 26.
5. Оппенгейм А.В., Шафер Р.В. Цифровая обработка сигналов. - М.: Связь, 1979. - 416 с.
6. Султанов Б.В., Дорошкевич В.В. Математическая модель цифровой системы фазовой синхронизации с накапливающими сумматорами // Тез. докл. конф. "Защита информации в сетях и системах связи". – Пенза, ПНИЭИ, 25 - 28 апреля 2000. – С. 65.

MATHEMATICAL MODELS OF DIGITAL PHASE-LOCKED LOOPS WITH UNIFORM SAMPLING

Sultanov B., Shcherbakov M., Zaharenkov V., Doroshkevich V.

State University of Penza
Krasnaya 40, Penza 440017, Russia, (841-2) 52-37-08, mash@sura.ru

The large variety of present variants of construction of digital phase locked loops (DPLL) has caused the different approaches to their classification, introduced, for example, in [1,2]. Not making deep reviewing of each of them we shall mark, that all of them, despite of a variance in choice of classification criteria, envision selection in separate group DPLL with analog-to-digital conversion up to a closed loop of a PLL. In such systems an input signal by means of a multilevel analog-to-digital converter realizing samplings with frequency, meeting condition the Nyquist, will be converted to the code, and the further information processing is carried out in an all-digital phase locked loop. As sampling rate of similar systems during their operation remains to fixed (does not depend on frequency entering and set up of oscillations), them name also as systems with even digitization [2, 3]. In the report the generalized model DPLL of this class is considered and some modes of mathematical exposition of possible versions of the second order phase locked loops are given.

The situation is parsed, when on an input there are $x_{ex}[k]$ - harmonic oscillations and additive white Gaussian noise with a variance σ^2 . Thus two variants of construction of a phase detector are possible: 1) with multiplication of samples $x_{ex}[k]$ and set up output oscillation and subsequent filtering of component product with a double frequency; 2) with shaping by means of a converter of the Hilbert quadrature component of a signal $x_{ex}[k]$ and subsequent compensation high frequency component. Advantage of the second variant is that at its implementation the filter (converter of the Hilbert), the defining level of suppression high frequency component, does not enter a structure of a PLL. It allows properly to select its parameters, not changing other characteristics DPLL. In the report the expression, defining output signal of both variants of construction of a phase detector is given. With usage of this expression, supposing, that the digital filter DPLL and synthesizer of an output signal have the transfer functions accordingly $H(z)$ and $H_{HCO}(z) = z^{-1}/(1 - z^{-1})$ the generalized skeleton diagram of the considered class DPLL is built. Modes of mathematical exposition DPLL further are considered, which one will use a digital filter, by defined temporal algorithm [2]:

$$v[k] = \beta \cdot y[k] + \mu \cdot \sum_{i=0}^k y[i], \quad (1)$$

where $v[k]$ and $y[k]$ - according to output and input signals; β and μ - coefficients.

The possibilities of alternative versions of implementation of a digital filter, equivalent definiendum by algorithm (1) are rotined. In particular, it is marked, that one of equivalent variants is the circuit with series filters [1,2]. The formulas knotting parameters of this circuit with coefficients $k1 = \beta + \mu$ and $k2 = -\beta$ are given.

Introduced in the report the results can form the basis for the analysis of the characteristics of the reviewed class DPLL.

REFERENCES

1. Цифровые системы фазовой синхронизации. / Под ред. М. И. Жодзишского. – М.: Сов. радио, 1980. – 208 с.
2. Lindsey W. C., Chie C. M. A survey of digital phase-locked loops // IEEE Proc. 1981. V. 69, № 4. P. 410 – 431.