

ИЗМЕНЯЕМЫЙ ПАРАМЕТР μ В АДАПТИВНОМ МЕТОДЕ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ*

Тараканов А.Н., Мосеев А.Л.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14.
Тел. (0852) 79-77-75. E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Алгоритм Метода Наименьших Квадратов (МНК), разработанный Уидроу и Хоффом [1-3], используется для обработки сигналов во многих практических направлениях. В этом алгоритме используется специальная оценка градиента, которая может быть применима к адаптивному линейному сумматору (рис. 1). А также этот метод может быть распространен и на рекурсивные адаптивные фильтры.

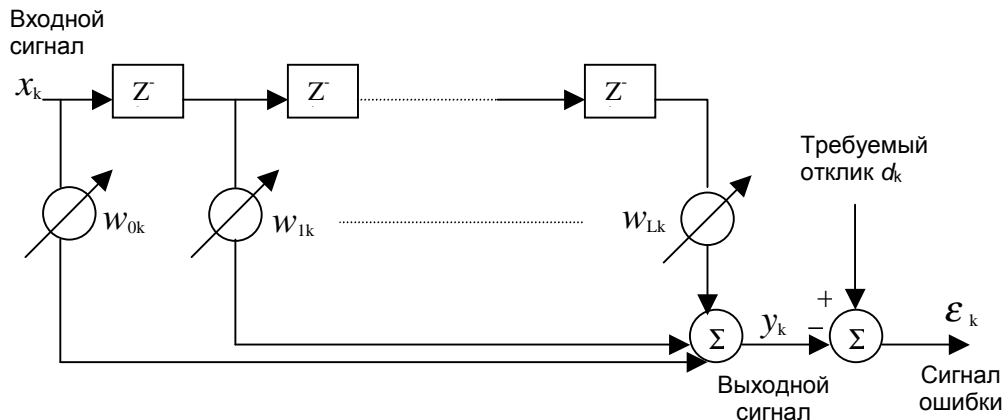


Рис. 1 Адаптивный линейный сумматор

МНК имеет важное значение, поскольку он является простым в вычислениях и не требует проведения оценки градиента в измерительном канале или повторных вводов данных. Если адаптивная система представляет собой адаптивный линейный сумматор и на каждой итерации известны входной вектор \mathbf{X}_k и требуемый отклик d_k , то в общем случае лучшим алгоритмом во многих приложениях адаптивной обработки сигналов является метод наименьших квадратов.

Общая формула для вычисления оптимальных весовых коэффициентов задается выражением

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + 2\mu\epsilon_k \mathbf{X}_k \quad (1),$$

где \mathbf{W}_k – вектор весовых коэффициентов фильтра; \mathbf{X}_k – вектор входного сигнала; ϵ_k – сигнал ошибки; μ – параметр определяющий скорость и устойчивость процесса адаптации.

Поскольку изменение весовых коэффициентов на каждой итерации осуществляется по неточным оценкам градиента, следует ожидать, что в адаптивном процессе возникает шум, т.е. адаптация протекает не по истинной траектории, соответствующей наискорейшему спуску.

Как и для всех адаптивных алгоритмов, одной из основных характеристик метода наименьших квадратов является сходимость вектора весовых коэффициентов к оптимальному, при котором ошибка достигает своего минимума.

Такая сходимость достигается при выполнении условия

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} > \mu > 0, \quad (2)$$

где, λ_{\max} – максимальное собственное значение автокорреляционной матрицы входного сигнала \mathbf{R} .

Неравенство (2) дает границы параметра μ , в которых среднее значение вектора весовых коэффициентов сходится к оптимальному вектору. Кроме того значение λ_{\max} не может превышать след матрицы \mathbf{R}

$$\lambda_{\max} \leq tr[\mathbf{R}] \quad (3)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации

Поэтому среднее значение вектора весовых коэффициентов сходится, если

$$1 < \mu < \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (4)$$

Неравенство (4) определяет более строгую границу параметра μ , чем (2), но его проще использовать, так как в общем случае легче найти элементы матрицы \mathbf{R} , чем ее собственные значения. В первоначальном варианте алгоритма МНК μ определялась, как константа и не изменялась в процессе адаптации. В дальнейшем были предложены алгоритмы, в которых μ изменялась. Одним из них является нормированный МНК [3]. В этом алгоритме параметр μ задается следующим соотношением

$$\mu(n) = \frac{\alpha}{\beta + \mathbf{x}_M^T(n)\mathbf{x}_M(n)}, \alpha \in (0,2), \beta \geq 0 \quad (5)$$

Однако такой выбор оставляет неопределенность в выборе параметров α и β т.к. их неправильный выбор (несоизмеримый входному сигналу) может привести к тому, что μ будет слабо зависеть от входного сигнала, либо будет полностью определяться им.

Чтобы избежать такой неопределенности можно обратиться непосредственно к неравенству (4) и записать соотношение для параметра μ в виде

$$\mu(n) = a \left(\frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]} \right), \quad 0 < a < 1 \quad (6)$$

Как было отмечено выше, нахождение элементов матрицы \mathbf{R} не является сложной в вычислительном плане задачей и поэтому не приводит к существенному усложнению алгоритма.

Об улучшении сходимости можно судить исходя из ниже приведенных кривых квадрата ошибки. За точку отсчета принимается кривая для случая, когда μ задается виде константы (рис. 2). На следующем графике μ устанавливается в соответствии с (6) (рис. 3).

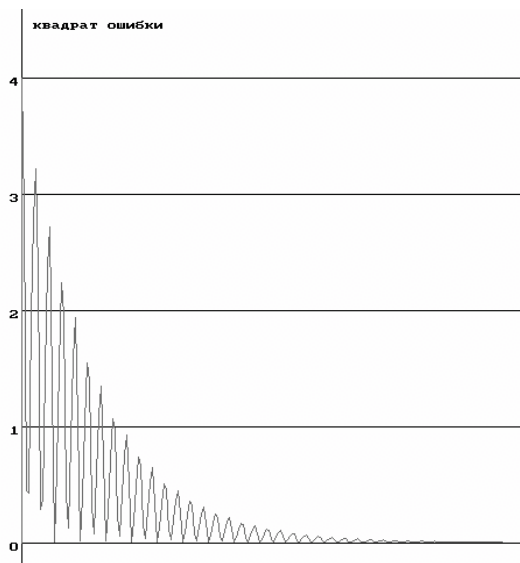


Рис. 2 Параметр μ задается виде константы, $\mu=0.1$.

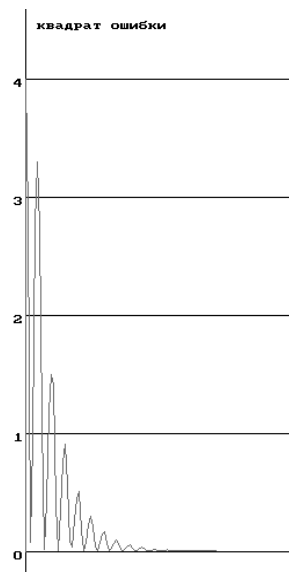


Рис. 3 Параметр μ задается в соответствии с (6), $a=0.1$.

Как видно из графиков, если выбрать μ , зависящим от входного сигнала, то в этом случае достигается более быстрая сходимость вектора весовых коэффициентов \mathbf{W}_k к оптимальным значениям. И, как уже отмечалось выше, вычисление μ не требует существенных затрат, что допускает применимость такого алгоритма в системах со слабыми вычислительными возможностями.

Литература

1. Б. Уидроу, С. Стирнз Адаптивная обработка сигналов М.: Радио и Связь, 1989. 440 с.
2. Адаптивные фильтры / под. ред. К. Ф. Н. Коуэна и П. М. Гранта. М.: Мир, 1988. 388 с.
3. Glentis G., Berberidis K. and Theodoridis S. Efficient LS Adaptive Algorithms for FIR Transversal Filtering: A Unified View. IEEE Signal Processing Magazine, pp. 13-41, July 1999.

VARIABLE PARAMETER μ IN ADAPTIVE LEAST-SQUARE METHOD

Tarakanov A., Moseev A.

Yaroslavl State University
Yaroslavl State University 150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaya st., 14
Phone.: (0852) 79-77-75, e-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Least-Square Method, designed by Widrow and Hoff, is used for signal processing in many practical areas. This algorithm uses special grade of gradient, which can be applied to the adaptive linear accumulator.

Least-Square Method have an important role, because it is simple for calculation and doesn't require gradient calculation in measured channel and reentering of data. If adaptive system is adaptive linear accumulator and vector of input signal \mathbf{X}_k and required output signal d_k are known at each iteration, then in many applications of adaptive signal processing the best algorithm is Least-Square Method.

Main formula for optimal coefficients calculation is

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k + 2\mu\varepsilon_k \mathbf{X}_k \quad (1)$$

where \mathbf{W}_k – filter coefficients vector; \mathbf{X}_k – vector of input signal; ε_k – error signal; μ - variable regulates the effect of the filter coefficients update.

The algorithm converges in the mean to the optimum solution when the step-size factor μ is restricted to be inside the interval

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} > \mu > 0, \quad (2)$$

where, λ_{\max} – denotes the biggest eigenvalue of the autocorrelation matrix of input signal \mathbf{R} . But

$$\lambda_{\max} \leq \text{tr}[\mathbf{R}] \quad (3).$$

Therefore step-size factor μ should be restricted to be inside the interval

$$1 < \mu < \frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]} \quad (4)$$

The calculation of matrix elements is ease then calculation of eigenvalues of matrix. In original variant of Least-Square Method parameter μ is considered as constant. In other variants of Least-Square Method can be variable. One way is to use (4) and formulate the interval for μ as follow

$$\mu(n) = a \left(\frac{1}{\text{tr}[\mathbf{R}]} \right), \quad 0 < a < 1 \quad (5)$$

Such μ definition increase algorithm convergence and doesn't require great calculations. Therefore Least-Square Method with variable parameter μ can be used in systems with weak calculation part.