ТОЧНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ОТНОШЕНИЯ ПРАВДОПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЧАСТИЧНО-КОГЕРЕНТНЫХ СИГНАЛОВ В СЛУЧАЕ КОРОТКИХ ВЫБОРОК

Болховская О.В., Мальцев А.А.

Нижегородский госуниверситет

При решении задачи обнаружения сигналов с неизвестными статистическими характеристиками на фоне шумов с неизвестными параметрами широко используется обобщенный критерий максимального правдоподобия. Этот метод использует в качестве тест-статистики отношение правдоподобия, в котором все неизвестные параметры сигнала и шума заменяются их максимально правдоподобными оценками. Получаемая при этом статистика в общем случае имеет достаточно сложное вероятностное распределение. Это, как правило, не позволяет решить аналитически задачу нахождения порогового значения тест-статистики при заданном постоянном уровне вероятности ложной тревоги . Поэтому используются различные численные или приближенные асимптотические методы, справедливые для больших объемов выборки.

В настоящей работе решается задача обнаружения с фиксированной вероятностью ложной тревоги многомерных гауссовских комплексных сигналов с неизвестной априори пространственной ковариационной матрицей на фоне аддитивных собственных гауссовских комплексных шумов неизвестной мощности. Задача обнаружения некоторого пространственно коррелированного полезного сигнала антенной решеткой может быть сформулирована как классическая задача проверки двух сложных гипотез. При этом используемая статистика имеет вид:

$$\Lambda = \max_{\mu,\boldsymbol{\Sigma}\in\omega} L(\mu,\boldsymbol{\Sigma}) \Big/ \max_{\mu,\boldsymbol{\Sigma}\in\Omega} L(\mu,\boldsymbol{\Sigma})$$

где L($\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Sigma}$) - функция правдоподобия, ω - подобласть, соответствующая нулевой гипотезе H_0, в полном пространстве параметров Ω. Критическая область отклонения гипотезы H_0 определяется из неравенства $\Lambda \le \Lambda_{порог}$. Для нахождения $\Lambda_{порог}$ по заданному уровню вероятности ложной тревоги $P_{FA} = q$; необходимо знать вероятностное распределение тест-статистики Λ (0<Λ<1). Несмотря на то, что функция распределения обобщенного отношения правдоподобия не представляется в аналитическом виде, для функции $V=\Lambda^{1N}$ были найдены точные аналитические выражения для моментов любого порядка. На основании полученных точных выражений для моментов построен ряд из ортогональных многочленов, хорошо аппроксимирующий плотность вероятности случайной величины V. В качестве нулевого бралось β-распределение $f(x)=\Gamma(p+q)/(\Gamma(p)\Gamma(q))x^{p-q}(1-x)^{q-1}$ с параметрами p и q, находимыми из условия равенства первых двух моментов β-распределения и первых двух моментов статистики V. Последующие члены аппроксимирующего ряда строились с помощью ортогональных многочленов Якоби по известным моментам статистики более высоких порядков.

Точность аппроксимации интегральной функции распределения и точность нахождения порога по заданной вероятности ложной тревоги при различной длине аппроксимирующего ряда проверялись путем численного моделирования. Для 5-элементной антенной решетки при 10 и 15 выборочных значениях находилась экспериментальная функция распределения обобщенного отношения правдоподобия на основании обработки 100.000 реализаций. При заданной вероятности ложной тревоги $P_{FA} = 0.01;0.05;0.1$ по экспериментальной функции распределения находились пороговые значения статистики V. Эти же пороговые значения находились аналитически с помощью аппроксимирующего ряда различной длины. Показано, что уже нулевое приближение позволяет устанавливать вероятность ложной тревоги с точностью до 5%. Использование аппроксимирующего ряда с учетом моментов 4-го позволяет устанавливать вероятность ложной тревоги с точностью до 1%.

EXACT EVALUATIONS OF DISTRIBUTION FUNCTION OF A GENERALIZED LIKELIHOOD RATIO FOR THE DETECTION OF SPATIAL PARTIALLY COHERENT SIGNALS IN THE SHORT SAMPLE CASE

Bolkhovskaya O., Maltsev A., Presti L.

The generalized likelihood ratio (GLR) test is widely used for a solution of a detection task of signals with unknown statistical characteristics in case of noise present with unknown parameters too. The GLR- method uses a likelihood ratio as a test-statistic, in which all unknown parameters of a signal and noise are substituted by them ML-estimates. In general, obtained test-statistic has complicate probability distribution. This does not allow to find analytically the test-statistic threshold for the given constant level of false alarm probability (P_{FA}). Therefore, the various numerical or asymptotic methods good for the large sample size are used.

In the present work the constant-false-alarm-rate (CFAR) detection task of multidimensional Gaussian complex signals with unknown spatial covariance matrix on a background of additive Gaussian complex noise of a unknown power is solved. The detection problem is formulated as classical two-hypothesis alternative and the test-statistic is

$$\Lambda = \max_{\mu,\mathbf{\Sigma}\in\omega} L(\mu,\mathbf{\Sigma}) \Big/ \max_{\mu,\mathbf{\Sigma}\in\Omega} L(\mu,\mathbf{\Sigma}).$$

Here $L(\mu,\Sigma)$ is the likelihood function, ω is the parameters sub-region corresponds to the null hypothesis H_0, in the full parameters space Ω. The rejection region of a hypothesis H_0 is determined from an inequality $\Lambda<\Lambda_{th}$., where Λ_{th} is the test-statistic threshold. To determinate Λ_{th} for the given false alarm probability $P_{FA} = \alpha$ it is necessary to know distribution function of the test-statistic Λ ($0<\Lambda<1$). In spite of the fact that the distribution function of the random variable Λ is not represented in an analytical form, the exact analytical expressions for statistical moments of any order for the function $V = \Lambda^{1/N}$ were found. On the base of obtained moments the series from orthogonal polynomials well approximating probability density of the random variable V was constructed. In this way as a zero approximation the beta probability distribution $f(x)=\Gamma(p+q) / (\Gamma(p)\,\Gamma(q))\, x^{p-q} (1-x)^{q-1}$ was used. Two beta density function parameters p and q were calculated from the condition of equalities for first two moments of the beta probability distribution and the test-statistic V. The next terms of the approximating series are constructed with the help of orthogonal Jacobi polynomials on the base of known test-statistic higher orders moments. The accuracy of the cumulative distribution function approximation and the accuracy of threshold calculations on the given P_{FA} for various numbers of approximating series terms were checked by simulation. For a 5-element antenna array with 10 and 15 samples the experimental cumulative distribution function of the test-statistic V from processing of 100.000 realizations was constructed. On the experimental distribution function the threshold values V_{th} of the test-statistic V for the given probabilities of a false alarm P_{FA} = 0,01; 0,05; 0,1 were found. The same threshold values were analytically calculated through employing the approximating series of various length. It is shown, that already zero approximation allows to determine P_{FA} with accuracy better then 20%. The use of the approximating serieses with four terms (taking into account four test-statistic moments) and six terms (taking into account six test-statistic moments) allow to calculate P_{FA} with accuracy better then 5% and 1% respectively.

This work was supported by the RFFI under Grants № 00-02-17602, № 00-15-96620 and the NATO under Grant PST.CLG.977419.