

Московский государственный авиационный институт  
(технический университет)  
125871, Москва, Волоколамское шоссе 4, МАИ  
тел.: (095) 158-68-00, факс: (095) 158-29-77, e-mail: [aet@tk.mainet.msk.su](mailto:aet@tk.mainet.msk.su)

К-этапные процедуры [1] относятся к классу последовательных процедур принятия решений и являются обобщением известных усеченных последовательных процедур проверки гипотез, в том числе процедуры Вальда [2]. В [1] разработан эффективный метод анализа и оптимизации  $k$ -этапных процедур, на основе которого были рассчитаны и исследованы различные  $k$ -этапные обнаружители сигналов [1,3-5]. Разработанный метод оптимизации  $k$ -этапных обнаружителей (КЭО) позволяет при выбранном критерии оптимизации (байесовском или условно-экстремальном) вычислять параметры КЭО – значения порогов и длительностей этапов. В основе метода оптимизации лежит статистическое моделирование решающей статистики, значения которой заносятся в память ПЭВМ и затем используются для вычисления оптимальных параметров КЭО. Оценки точности расчета параметров и характеристик КЭО получены в [3] (для многоканальных обнаружителей при  $k=2$ ) при использовании различных серий моделирования на ПЭВМ последовательностей независимых случайных чисел. При этом погрешности расчета порогов и средних чисел отсчетов (СЧО) составили 1...3 %. Однако достоверность этих оценок невелика, так как для их получения проводилось сравнение между собой различных результатов статистического моделирования.

Целью настоящей работы является получение достоверных оценок точности расчета параметров и характеристик КЭО при использовании метода оптимизации [1]. Более высокая достоверность полученных результатов обеспечивается за счет использования точных вычислительных формул для расчета характеристик КЭО (вероятностей ошибочных решений и условных СЧО), которые можно получить для некоторых частных видов распределений решающей статистики.

Рассмотрим КЭО, в котором для обозначения факта наличия ( $i=1$ ) или отсутствия ( $i=0$ ) полезного сигнала вводится индикаторная переменная  $\vartheta = i$ . Отсчеты наблюдений разбиваются на  $k$  групп по  $n^{(j)}$  отсчетов в каждой,  $j=1, \dots, k$ . Общее число отсчетов  $n_k \leq n_{\max}$ , где  $n_j = \sum_{i=1}^j n^{(i)}$ ;  $n_{\max}$  - максимально допустимое число отсчетов. В конце каждого этапа от 1-го до  $(k-1)$ -го выносятся заключительное решение  $d_i$  о значении параметра  $\vartheta = i$  и наблюдения прекращаются, либо выносятся решение  $d_c$  о проведении следующего этапа наблюдения. После проведения  $k$ -го этапа возможно принятие только заключительного решения, наблюдения прекращаются. Принятие решений  $\{d_c, d_0, d_1\}$  осуществляется путем сравнения решающей статистики  $L_{n_j}$  с двумя порогами  $A_j > B_j$  на этапах  $j=1, \dots, k-1$  и с одним порогом  $C$  на последнем  $k$ -ом этапе.

Предположим, что значения порогов  $A_j, B_j$  ( $j=1, \dots, k-1$ ),  $C$  и длительности этапов  $n^{(j)}$  ( $j=1, \dots, k$ ) заданы и необходимо вычислить характеристики КЭО – вероятность ложной тревоги (ВЛТ)  $P_F = \mathbf{P}\{d_1 | \vartheta = 0\}$ , вероятность правильного обнаружения (ВПО)  $P_D = \mathbf{P}\{d_1 | \vartheta = 1\}$  и условные СЧО  $\bar{n}_i = \mathbf{M}[n_j | \vartheta = i]$ ,  $i=0,1$ . Общие соотношения для вычисления характеристик  $P_F, P_D$  и  $\bar{n}_i$  КЭО приведены в [4], где используются условные плотности распределения вероятностей (ПРВ)  $p(L_{n_j} | \vartheta = i)$ ,  $p(L_{n_j} | L_{n_1}, \dots, L_{n_{j-1}}, \vartheta = i)$ ,  $j=1, \dots, k, i=0,1$ . Однако в большинстве задач использование соотношений (6)-(8) в [4] для расчета характеристик КЭО не представляется возможным из-за необходимости вычисления многомерных интегралов и сложности расчета условных ПРВ для решающей статистики. Существенно упростить расчеты удастся, если статистика на каждом этапе имеет независимые приращения, т.е.  $L_{n_j} = L_{n_{j-1}} + z_j$ , где  $z_j = z(n^{(j)})$

- независимые случайные величины с известной ПРВ  $p_{ij}^{(z)}(z_j) = p(z_u | u = j, \vartheta = i)$ ,

$j = 2, \dots, k$ ,  $L_{n_1} = z_1$ . Тогда условные ПРВ решающей статистики можно вычислять с помощью рекуррентных соотношений:

$$p_{ij}(L_{n_j}) \equiv p(L_{n_u} | u = j, \vartheta = i) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{ij-1}(x) p_{ij}^{(z)}(L_{n_j} - x) dx. \quad (1)$$

При этом для характеристик КЭО получаем формулы:

$$P_F = \sum_{j=1}^k q_{0j} P_{Fj}, \quad P_D = \sum_{j=1}^k q_{1j} P_{Dj}, \quad \bar{n}_i = \sum_{j=1}^k n_j r_{ij}, \quad i = 0, 1, \quad (2)$$

где

$$P_{Fj} = \int_{A_j}^{\infty} p_{0j}(L_{n_j}) dL_{n_j}, \quad P_{Dj} = \int_{A_j}^{\infty} p_{1j}(L_{n_j}) dL_{n_j} \quad (3)$$

- значения ВЛТ и ВПО на  $j$ -ом этапе,

$$q_{ij} = \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \dots \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \prod_{u=1}^j p_{iu}(L_{n_u}) dL_{n_u}, \quad j = 2, \dots, k, \quad q_{i1} \equiv 1 \quad (4)$$

- вероятности проведения наблюдений на этапах  $u=1, \dots, j$  при  $\vartheta = i$ ;

$$r_{ij} = \int_{-\infty}^{B_j} \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \dots \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \prod_{u=1}^j p_{iu}(L_{n_u}) dL_{n_u} + \int_{A_j}^{\infty} \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \dots \int_{B_{j-1}}^{A_{j-1}} \prod_{u=1}^j p_{iu}(L_{n_u}) dL_{n_u} \quad (5)$$

- вероятности остановки наблюдений на  $j$ -ом этапе при  $\vartheta = i$ .

Характеристики КЭО (2) можно рассчитать численно, если будут получены аналитические выражения для условных ПРВ (1). Такие расчеты можно провести для задачи  $k$ -этапного обнаружения некогерентной пачки радиоимпульсов, наблюдаемых на фоне белого гауссовского шума. В качестве решающей статистики для  $n_j$  импульсов используем величину  $L_{n_j} = L_{n_{j-1}} + z_j$ , где  $z_j$  - огибающая пачки из  $n^{(j)}$  импульсов. Ограничимся рассмотрением случая  $\vartheta = 0$  и  $n^{(j)} = 1, j = 1, \dots, k$ , так как в случае  $\vartheta = 1$  объем вычислений резко возрастает. В случае сильных сигналов ( $z_j \gg 1$ ) при использовании линейного детектора ПРВ величины  $z_j$  при  $\vartheta = 0$  имеет вид [6]:

$$p_{0j}^{(z)}(z) = \frac{z^{2l-1} \exp(-z^2/(2\rho))}{2^{l-1} \rho^l (l-1)!}, \quad (6)$$

где  $l = n^{(j)}$ ;  $\rho$  - эффективное отношение сигнал-шум в одном импульсе. Численные расчеты интегралов в (1), (3)-(5) проводились путем аппроксимации ПРВ (6) дискретным распределением вероятностей случайной величины  $z_j$  с числом значений  $m=50 \dots 200$ , обеспечивающим заданную точность расчетов. При проведении расчетов ВЛТ  $P_F$  и СЧО  $\bar{n}_0$  по формулам (2)-(5) необходимо задание порогов  $A_j, B_j$  ( $j = 1, \dots, k-1$ ) и  $C$ . Значения этих порогов вычислялись согласно методу оптимизации [1] при условно-экстремальном критерии минимума СЧО  $\bar{n}_0$  для заданных значений ВЛТ  $P_F^{(0)}$ , ВПО  $P_D^{(0)}$  и числе этапов  $k = n_k = 4$ . В таблице 1 представлены оптимальные значения порогов, рассчитанные при  $P_F^{(0)} = 10^{-4}$ ,  $P_D^{(0)} = 0.9$  и  $\rho = 1.125$ . Аналогичные расчеты порогов проведены и для других значений  $P_F^{(0)}$ ,  $P_D^{(0)}$  и  $\rho$ .

Таблица 1.  $A_4 = B_4 = C$

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
$A_j$	4.3031	7.1345	9.9979	11.7096
$B_j$	1.1262	4.1670	6.8174	11.7096

Полученные при этом значения порогов использовались для расчетов значений ВЛТ  $P_F$  и СЧО  $\bar{n}_0$  по формулам (2)-(5). В таблице 2 представлены результаты расчетов характеристик КЭО, полученные двумя способами (путем моделирования и путем расчетов по формулам) для четырех случаев  $P_F^{(0)} = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$  (значение ВПО  $P_D^{(0)} = 0.9$ ).

Таблица 2.

ВЛТ		Результаты статистич. моделирования	Результаты расчетов по формулам
$P_F^{(0)} = 10^{-1}$	$P_F$ $\bar{n}_0$	$10^{-1}$ 2.520	$1.016 \cdot 10^{-1}$ 2.552
$P_F^{(0)} = 10^{-2}$	$P_F$ $\bar{n}_0$	$10^{-2}$ 2.164	$1.008 \cdot 10^{-2}$ 2.137
$P_F^{(0)} = 10^{-3}$	$P_F$ $\bar{n}_0$	$10^{-3}$ 1.843	$0.976 \cdot 10^{-3}$ 1.871
$P_F^{(0)} = 10^{-4}$	$P_F$ $\bar{n}_0$	$10^{-4}$ 1.610	$0.995 \cdot 10^{-4}$ 1.580

Отметим, что при использовании метода оптимизации [1] расчетное значение ВЛТ равно заданному  $P_F = P_F^{(0)}$ , так как оно определяется в процессе вычисления порогов. Из таблицы 2 видно, что точность расчета характеристик КЭО с помощью метода [1] достаточно высока и погрешности расчетов, как предполагалось, не превышают 3%. Полученные результаты свидетельствуют о достаточно высокой точности расчета параметров и характеристик различных КЭО, исследованных в [1,3-5] и др.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 01-01-00391) и Министерства образования РФ (грант Т00-2.4-497).

#### БИБЛИОГРАФИЯ

1. Sosulin Yu.G., Gavrillov K.Yu. *K-Stage Procedures of Testing Statistical Hypotheses*. // Pattern Recognition and Image Analysis, 1996, v. 6, № 4, p. 662-674.
2. Вальд А. *Последовательный анализ*: Пер. с англ./Под ред. Б.А. Севастьянова. –М.: Физматгиз, 1960.
3. Сосулин Ю.Г., Гаврилов К.Ю. *Метод анализа и оптимизации многоканальных двухэтапных последовательных обнаружителей*. // Радиотехника и электроника, 1996, том 41, № 5, с.563-574.
4. Сосулин Ю.Г., Гаврилов К.Ю. *К-этапное обнаружение сигналов*. // Радиотехника и электроника, 1998, том 43, № 7, с. 835-850.
5. Сосулин Ю.Г., Гаврилов К.Ю. *К-этапное обнаружение сигналов с постоянным уровнем ложных тревог при параметрической неопределенности*. // Радиотехника и электроника, 2001, том 46, № 7, с. 839-848.
6. Вайнштейн Л.А., Зубаков В.Д. *Выделение сигналов на фоне случайных помех*. –М.: Сов. Радио, 1960.



VARIFICATION OF OPTIMIZATION METHOD FOR K-STAGE DETECTORS

Gavrilov K.

Moscow State Aviation Institute (Technical University)  
Volokolamskoe sh. 4, Moscow, 125871 Russia  
phone: (095) 158-13-73, fax: (095) 158-29-77, e-mail: [aet@tk.mainet.msk.su](mailto:aet@tk.mainet.msk.su)

*K*-stage procedures [1] belong to the class of sequential decision-taking procedures and they are generalization of known truncated sequential procedures of hypotheses testing, including Wald's procedures [2]. In [1] an efficient method of analysis and optimization of *k*-stage procedures was developed, and some *k*-stage signal detectors were designed and investigated on the basis of the method [1, 3-5]. Applied to *k*-stage detectors (KSD), the developed optimization method allows to compute KSD parameters (namely, threshold values and duration of stages) for the selected optimization criterion. Foundation of the optimization method is statistical simulation of the decision statistics, the values of which are written into computer memory and further are used to calculate the optimal KSD parameters. But reliable estimates of calculation accuracy for KSD parameters and performances, obtained by this method, are absent to present day.

The purpose of the present paper is to derive such reliable estimates of calculation accuracy for KSD parameters and performances by means of the optimization method [2]. Higher reliability of obtained results is guaranteed by use of analytical computation of KSD performances (probabilities of mistaken decisions and conditional average sample numbers (ASN)) that can be performed for some special types of decision statistic distribution.

Calculation of KSD performances is executed for given thresholds, the values of which are computed by the optimization method [2] for conditional-extremum criterion of ASN minimum. Analytical expressions for KSD performance calculation in assumption that decision statistic at each stage has independent additives are derived. The detection statistic for non-coherent pulse train observing on the background of white Gaussian noise satisfies to the above-mentioned condition. Approximating probability distribution density of statistic additives by discrete distribution, the obtained formulas allow to accomplish an accurate calculation of KSD performances. Such evaluation of false alarm probability (FAP) and conditional ASN (in absence of useful signal) was performed for various KSDs, the threshold values of which were derived by means of the method [2]. While calculating KSD performances and parameters it was assumed that only one pulse is observed at each stage, the FAP values were equal  $10^{-1}$ ,  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ,  $10^{-4}$  and the detection probability value was 0.9. Obtained results showed that accuracy of performance computation by means of KSD optimization method is quite high and error of the calculated parameters and performances doesn't exceed 3%.

This work was executed under support of Russian Foundation for Basic Research (project no.01-01-00391) and of Russian Ministry of Education (project no.TOO-2.4-497).

REFERENCE

1. Sosulin Yu.G., Gavrilov K.Yu. *K-Stage Procedures of Testing Statistical Hypotheses*. // Pattern Recognition and Image Analysis, 1996, v. 6, No. 4, p. 662-674.
2. Wald A. *Sequential Analysis*. New York: Wiley, 1947.
3. Sosulin Yu.G., Gavrilov K.Yu, Voitkevich A., Nalench M. // Radiotekh. i Elektron., 1996, v.41, no.5, p.563-574.
4. Sosulin Yu.G., Gavrilov K.Yu. *K-Stage Signal Detection*. // Journal of Communications Technology and Electronics, 1998, v. 43, No. 7, p. 776-790.
5. Sosulin Yu.G., Gavrilov K.Yu. *K-etapnoe obnaruzhenie signalov c postojannim urovnem lojnih trevog pri parametricheskoj neopredelennosti*. // Radiotekhnika i electronica, 2001, v. 46, No. 7, p. 839-848.
6. Vajnschtejn L.A., Zubakov V.D. *Videlenie signalov na fone sluchajnich pomech*. –Moskva: Sov. Radio, 1960.