ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА СЖАТИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЧЕБЫШЕВСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (АЛГОРИТМ GDCT)

Радченко Ю.С.

Воронежский государственный университет
394693, Воронеж, пл. Университетская, 1, кафедра радиофизики

Передача телевизионных и компьютерных изображений, видеоконференции и видеосотовая связь предполагают применение процедур сжатия изображений. В последнее время выполнен ряд работ, в которых предлагается применять разложения по базису классических ортогональных полиномов [1,2,3]. Наибольший интерес представляет разложение сигналов по базису полиномов Чебышева. Алгоритм преобразования по полиномам Чебышева назван обобщенным косинусным преобразованием (GDCT). В данной работе приводятся результаты исследования алгоритма GDCT.

Пусть в подобласти $\{x,y\}\in\Omega$ наблюдается поле s(x,y), представляющее собой фрагмент $u(x,y)I_\Omega(x,y)$ пространственного сигнала. Здесь $I_\Omega(x,y)$ - индикаторная функция подобласти. Реализация процедуры сжатия существенно упрощается, если имеет место факторизация функций $\varphi_{mk}(x,y)=\varphi_m(x)\ \varphi_k(y)$. Здесь $\varphi_m(x)$, $\varphi_k(y)$ – одномерные функции, основанные на ортогональных полиномах. Если обозначить a_x,a_y – характерные размеры подобласти Ω, $z_1=x/a_x$, $z_2=y/a_y$, то для полезного сигнала s(x,y) имеет место пара преобразований

$$s(x,y)=\sum_{m,k} C_{mk} p_m(x/a_x) p_k(y/a_y),$$

$$C_{mk}=(d_m d_k)^{-1}\int \rho(z_1)p_m(z_1)dz_1\int s(a_x z_1, a_y z_2)\rho(z_2)p_k(z_2)dz_2. \qquad (1)$$

Здесь d_m – норма ортогонального с весом $\rho(z)$ полинома $p_m(z)$.

1. Одномерный алгоритм преобразования Чебышева.

Пусть имеется процесс s(z), квадратично интегрируемый с весом $\rho(z)$. Тогда можно записать квадратурную формулу гауссовского типа как $\int s(z)\rho(z)dz=\sum_{n=1}^{N}\lambda_n s(z_n)$. Узлы и веса $\{z_n\}$, $\{\lambda_n\}$ однозначно определяются видом ортогонального с весом $\rho(z)$ полинома $p_m(z)$. Для полиномов Чебышева получается формула Меллера (Гаусса-Чебышева)

$$\frac{1}{d_m}\int_{-1}^{1}\frac{s(z)T_m(z)}{\sqrt{1-z^2}}dz=\frac{\pi}{d_m N}\sum_{n=0}^{N-1}s(z_n)T_m(z_n). \qquad (2)$$

Здесь $z_n=\cos(\pi(2n+1)/2N)$ –нули полинома Чебышева I рода $T_N(z)$; $\lambda_n=\pi/N$ – то есть все весовые коэффициенты одинаковы, норма полинома Чебышева $d_m=\pi/2$, если $m\neq 0$, и $d_m=\pi$, если m=0. Учитывая, что $T_m(z_n)=\cos(m\cdot\arccos(z_n))=\cos(\pi m(n+0.5)/N)$, приходим к выражению для прямого и обратного преобразований

$$C_m=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}s(z_n)\cos(\pi m\frac{n+0.5}{N}),\quad C_0=\sqrt{\frac{1}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}s(z_n)$$

$$S_M(z)=g_m\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m=0}^{M}C_m T_m(z)=g_m\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{m=0}^{M}C_m\cos(m\cdot\arccos(z)) \qquad (3)$$

Здесь $g_m=1$ при m>0 и $g_m=0.5$ при m=0. $S_M(z)$- сигнал, восстановленный по M спектральным коэффициентам. Выражение (3) весьма похоже на так называемое четное дискретное косинусное преобразование (ДКП) [1]. Но имеет три важных отличия: 1)Точки отсчета $z_n=\cos(\pi(n+0.5)/N)$ сигнала s(z) берутся неравномерно. 2)Синтез сигнала $S_M(z)$ выполняется в произвольной точке $z\in[-1,1]$, а не в дискретном наборе точек отсчета, как в ДКП. 3)Точность формулы (4) при преобразовании достаточно гладких функций существенно выше, чем у ДКП. Поэтому число отсчетов можно взять значительно меньше. Число отсчетов N и число спектральных коэффициентов M, которые определяются преобразованием (4) , вообще говоря, не связаны между собой. То есть матрица прямого и обратного преобразования в общем случае является прямоугольной. Исследования показали, что целесообразно выбирать $M\le N$, поскольку для индексов m>N коэффициенты C_m вычисляются с достаточно большой относительной погрешностью.

2. Двумерный алгоритм преобразования (GDCT).

Перейдем теперь к двумерному варианту преобразований сигнала s(x,y). Пусть в пределах блока из N1×N1 точек, берутся отсчеты сигнала N×N штук по закону

$$x_n = \mathrm{ROUND}(0.5\cdot(N1-1)\cdot(1+\cos(\pi(n+0.5)/N)))$$
$$y_k = \mathrm{ROUND}\big(0.5\cdot(N1-1)\cdot(1+\cos\big(\pi(k+0.5)/N\big)\big)\big) \qquad (4)$$

При равномерной дискретизации исходного изображения неравномерность отсчетов для вычисления Чебышевских преобразований достигается пропуском части пикселов.
Отбор отсчетов производится по закону (4). Отсчеты сигнала образуют матрицу $S=\|s_{nk}\|=\|s(x_n,y_k)\|$. Затем эта матрица преобразуется в матрицу спектральных коэффициентов **C** размером M×M. При обратном преобразовании может использоваться прямоугольная матрица размером L×M. То есть восстановленный блок имеет размеры L×L. Прямое и обратное преобразование Чебышева (GDCT) в матричном виде определяются операциями

$$C=\|C_{m,l}\|=\phi S\phi^{T}, \qquad \mathbf{S}=\Psi^{\mathbf{T}}C\Psi . \qquad (5)$$

Матрицы прямого и обратного преобразования GDCT имеют вид

$$\phi=\|\varphi_m(n)\|_{NM}=\sqrt{\frac{2}{N}}\begin{bmatrix}\sqrt{0.5}\\ \cos(\pi m\dfrac{(n+0.5)}{N}\end{bmatrix},$$

$$\Psi=\left\|\cos\big(m\cdot\arccos(z_j)\big)\right\|_{LM}=\left\|\cos(m\cdot\arccos(\frac{2j}{L-1}-1+\delta))\right\|. \qquad (6)$$

В частном случае можно полагать δ=0.

3. Результаты исследования алгоритма GDCT.

Возможности предложенного алгоритма были исследованы экспериментально. В блоке изображений размером N1×N1 элементов выбирается матрица N×N отсчетов (N<N1). Так происходит сжатие на ступени I процедуры. Затем с помощью преобразования GDCT вычисляется матрица M×M из наиболее значимых спектральных коэффициентов, которые в дальнейшем преобразуются или при помощи матрицы квантования, или путем регулируемой низкочастотной фильтрации. Так происходит сжатие изображения на II ступени процедуры. Для алгоритма GDCT использовались матрицы квантования, взятые из стандартов JPEG, MPEG. При восстановлении изображения формируется блок размером L×L элементов. Как отмечалось выше, размер блока L×L может быть меньше, равен или больше размеров исходного блока N1×N1. В зависимости от типа изображения выбирались следующие значения параметров: N1/N=16/8, 12/8, 12/6, 8/6. Такие значения были выбраны на основе теоретических и практических исследований по модельным и реальным изображениям. Для удобства преобразований матрица прямого преобразования выбиралась квадратной N=M. Отношение размеров восстановленного и исходного блоков выбиралось L/N1=1-2-4-6. При L/N1>1 реализовывалась, таким образом, функция геометрического масштабирования восстановленного изображения.

Для экспериментов был выбран набор искусственных изображений и натурных фотографий. Цветные изображения были представлены в 24 битовом формате BMP. С этими изображениями осуществлялись следующие операции.

1) Перекодировка 8-битовых R, G, B –компонент цвета в Y,U,V по правилу: Y=int(0.299R+ 0.587G +0.114B), U=int(0.500R-0.419G-0.081B)+128, V=int(-0.169R-0.331G+0.500B)+128.
2) Субдискретизация матриц Y,U,V по одному из законов: 4:4:4, 4:2:2, 4:2:0.
3) Спектральное преобразование матриц Y,U,V на основе GDCT. В зависимости от типа изображения на первой ступени сжатия проводилось прореживание в пропорции N1/N=16/8, 12/8, 12/6, 8/6. Затем проводилось преобразование спектральной матрицы **C** для реализации второй ступени сжатия изображения. При этом производилась «низкочастная» фильтрация матрицы C путем обнуления коэффициентов $C_{m,l}$ при m+l>K, где K регулировалось. 4) Восстанавливался блок размером L×L. Затем производилась визуальная оценка качества изображения. На фигурах 1-3 в качестве примера показаны результаты преобразований объекта типа «портрет» с помощью алгоритмов GDCT и JPEG. Степень сжатия за счет усечения спектров в алгоритмах JPEG и GDCT взята 5.6 . Но в алгоритме GDCT проведено дополнительно сжатие первой ступени в 4 раза (фигура 3). На фигуре 4 показано восстановленное изображение с двукратным увеличением, L/N1=2/

Исследования показали, что изображения с плавными градациями яркости и цвета могут быть подвергнуты сильному сжатию уже на I ступени процедуры. Насыщенные мелкими деталями текстуры и натурные изображения испытывают искажения в GDCT, и рекомендуемая степень сжатия I ступени порядка 30-50%. Скорость убывания спектров сигналов в GDCT такого же порядка, как и в классическом дискретном косинусном преобразовании. Поэтому сжатие на II ступени такого же порядка, как и в алгоритме JPEG. Так как положение узлов полиномов Чебышева образуют дробные числа, то были исследованы две реализации GDCT – с округлением положения узлов до ближайшего пикселя, и с межпиксельной линейной интерполяцией. Эксперименты показали, что интерполяция улучшает передачу тонких деталей и наклонных краев изображений. Поскольку алгоритм GDCT восстанавливает сигнал в любой заданной точке, то это открывает возможности геометрического масштабирования картин при восстановлении сжатого изображения, более точного определения межкадрового сдвига фрагмента изображения. Сходство GDCT и DCT позволяет их объединять, дополнять друг друга, использовать существующие программно-аппаратные средства для обеспечения работы нашего алгоритма. В частности, к алгоритму GDCT применима процедура быстрого преобразования Фурье

Литература

1. Ю.С. Радченко, М.Ю. Радченко Оптимальные быстрые алгоритмы представления изображений в базисе ортогональных полиномов. Труды I международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения» DSPA'98, 1998, Москва, т. III, с. 163-166.
2. Ю.С. Радченко, А.Ю. Кожин, М.Ю. Радченко Обнаружение и оценка параметра сдвига сжатых с помощью ортогональных полиномов сигналов. Радиотехника, №6, 1999, с. 17-19.
3. Ю.С. Радченко, А.Ю. Савинков Исследование алгоритмов сжатия изображений на основе полиномиальных преобразований (алгоритм GDCT). Труды III конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения» DSPA'2000, 2000, Москва, т. II, с. 89-91

Объект-портрет

Фигура 1. Исходный

Фигура 2. GDCT 12→6

Фигура 3. JPEG –5.6

Фигура 4. Двукратное увеличение при восстановлении

RESEARCH OF IMAGE SUPPRESSION ALGORITHMS ON BASIS OF POLYNOMIAL CONVERSIONS (ALGORITHM GDCT)

Radchenko Yu.

Physics Department, Voronezh State University,
1 Universitetskaya Sq., Voronezh 394693, Russia

Let us assume that in $\{x,y\}\in\Omega$ subdomain we observe s(x,y) field which is an image block. If a_x,a_y are denoted as typical sizes of Ω, $z_1=x/a_x$, $z_2=y/a_y$ of the subdomain then the conversions follow

$$s(x,y)=\sum_{m,k} C_{mk}T_m(x/a_x)T_k(y/a_y),$$

$$C_{mk}=(d_m d_k)^{-1}\int \rho(z_1)T_m(z_1)dz_1\int s(a_x z_1, a_y z_2)\rho(z_2)T_k(z_2)dz_2. \qquad (1)$$

Here d_m – norm of Chebyshev's polynomial $T_m(z)$, $\rho(z)=(1-z^2)^{-1/2}$ To calculate (1) we can use Gauss-Chebyshev quadrature formula. Expressions for direct and reverse conversions are the following $C=\left\|C_{m,l}\right\|=\varphi S\varphi^T$, $\mathbf{S}=\Psi^T C\Psi$. Matrixes of the direct and reverse GDCT conversion are the following

$$\varphi=\sqrt{\frac{2}{N}}\begin{bmatrix}\sqrt{0.5}\\ \cos(\pi m\dfrac{(n+0.5)}{N}\end{bmatrix}, \qquad \Psi=\left\|\cos(m\cdot\arccos(\frac{2j}{L-1}-1))\right\|. \qquad (2)$$

Expression (2) is similar to the sampled cosine conversion (DCT) [1]. However it has three main differences. 1) In the image block by the size of N1×N1 elements we choose N×N matrix having (N<N1) samples. $z_n=\cos(\pi(n+0.5)/N)$ reference points of s(z) signal are taken irregularly. 2) Synthesis of the $S_M(z)$ signal is performed rather at the arbitrary point $z\in[-1,1]$, than in the sampled set of reference points, as in SCC. 3) The formula accuracy (4) with the conversion of the sufficiently smooth functions is substantially higher than in SCC. While the reverse conversion a rectangular matrix of L×M size can be used. In other words the recovered block is of L×L size and gives a possibility to scale the image.

For experiments we selected a set of artificial images and natural photographs of 24-bit BMP format. Researches showed that images with smoothed gradation of brightness and color can be strongly suppressed at I procedure stage (thinning of pixels under Gauss-Chebyshev law). Textures having small details and natural images are distorted in GDCT and the recommended suppression degree at I stage is about 30-50%. Decrease rate of signal spectrums in GDCT is the same as that in the classis sampled cosine conversion. Therefore the suppression at II stage is the same as that in JPEG algorithm. Possibilities of geometric picture scaling while recovering the suppressed image have been researched.

Reference

1. Yu.S. Radchenko, A.Yu. Savinkov Research of Image Suppression Algorithms on basis of Polynomial Conversions (GDCT Algorithm). Proc. of the III conference «Digital Signal Processing and its Applications» DSPA'2000, 2000, Moscow, v. II, p. 89-91