ПРИМЕНЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ТИПА ПАДЕ ДЛЯ СИНТЕЗА ДВУМЕРНЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

* Чобану[1] М.К., ** Чобану П.М.

* Московский энергетический институт (ТУ)
ул. Красноказарменная, 13, каф. Электрофизики, Москва, 105835
** Московский государственный университет, ФВМиК
Воробьевы горы, МГУ, Москва, 119899

Аннотация. Показано, как применить результаты, полученные в [1], при синтезе многомерных рекурсивных фильтров. Программно реализован алгоритм рациональной аппроксимации (типа Паде) заданной двумерной импульсной характеристики цифрового фильтра.

Введение

Вопросы синтеза двумерных рекурсивных цифровых фильтров являются очень важными для целого ряда приложений – восстановления изображений, сжатия изображений, и др. Существуют методы синтеза в частотной и пространственной областях. Рассматривается метод синтеза двумерного цифрового фильтра по заданной импульсной характеристике. Выбор определяющего (интерполирующего) множества **I(n, m)** (см. [1]) для аппроксимации типа Паде позволяет корректно решить поставленную задачу.

M-D аппроксиманты типа Паде

Аппроксимируемая импульсная характеристика G(*z*1*, z*2) задана двумерным рядом Тэйлора и равна

$$G(z_1,z_2)=\begin{bmatrix}1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3\ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \ldots & h_{0(M-1)} \\ h_{10} & h_{11} & \ldots & h_{1(M-1)} \\ \ldots & & & \ldots \\ h_{(N-1)0} & h_{(N-1)1} & \ldots & h_{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ z_2 \\ z_2^2 \\ z_2^3\end{bmatrix}$$

где **h(m,n)** заданы.

Обобщенный аппроксимант Паде (Чисхолм [4], Вавилов [5]) H(*z*1*, z*2) для заданных **n = (*n*1*; n*2)** и **m = (*m*1*; m*2)** определяется как рациональная функция

$$H(z_1,z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}p_{i,j}z_1^i z_2^j}{\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{l=0}^{m_2}q_{k,l}z_1^k z_2^l},\quad q(0,0)=1$$, которая удовлетворяет условию

$$G(z_1,z_2)\left[\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{l=0}^{m_2}q_{k,l}z_1^k z_2^l\right]-\left[\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2}p_{i,j}z_1^i z_2^j\right]=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}v_{i,j}z_1^i z_2^j\right]$$, так, что **v(*i; j*)=0** для **(*i; j*)∈ I(n*;* m)**.

Размерность определяющего множества I(n*;* m) равна $\dim I(n,m)=\tau_{n,m}$, где $\tau_{n;m}$ = (*n*1+1)(*n*2+1)+(*m*1+1)(*m*2+1) - 1.

Число неизвестных коэффициентов рациональной функции совпадает с размерностью определяющего множества. Выбор интерполирующего (определяющего) множества I(n,m) обоснован в [1]. В различных публикациях неправильный выбор этого множества приводил к неправильным заключениям относительно существования или неединственности двумерной Паде аппроксимации [2, 3]. Новые результаты, полученные в [1, 5], позволяют сделать правильный выбор множества I(n,m). Основные свойства определяющего множества:

1. ***dim*I(n*;* m) =** $\tau_{n;m}$;
2. **(*n*1 + *m*1*;* 0), (0*; n*2 + *m*2) ∈ I(n*;* m)** (это гарантия того, что при *z*1 = 0 (или *z*2 = 0) будет получена классическая 1-D рациональная аппроксимация типа Паде.);
3. **n = (*n*1*; n*2) ∈ I(n*;* m)**; если **(*k*1*; k*2) ∈ I(n*;* m)** то **[0*;* k] ⊂ I(n*;* m),** где **[0*;* k] = { (*s; u*) : 0 ≤ *s* ≤ *k*1*;* 0 ≤ *u* ≤ *k*2 }** - правило прямоугольника.

В [1, 5] приводятся единственные два случая определяющих множеств, для которых была доказана Montessus de Ballore-type теорема.

[1] Работа выполнена в рамках гранта РФФИ № 01-01-00738.

Результаты моделирования

Предложенный метод рациональной аппроксимации был реализован в среде MATLAB (v.5.3.1.). Ниже приводятся несколько примеров аппроксимации заданной двумерной импульсной характеристики и соответствующие погрешности аппроксимации.

В качестве двумерной ИХ была выбрана следующая матрица - $h_{i,j} =$

$$\begin{bmatrix} 1.000000000 & -3.500000000 & 4.250000000 & -1.875000000 & .06250000000 & .03125000000 \\ -4.500000000 & 16.00000000 & -19.87500000 & 9.125000000 & -.4062500000 & -.1875000000 \\ 7.750000000 & -28.12500000 & 36.00000000 & -17.43750000 & 1.078125000 & .4453125000 \\ -6.125000000 & 22.87500000 & -30.56250000 & 16.00000000 & -1.460937500 & -.5078125000 \\ 1.937500000 & -7.593750000 & 10.92187500 & -6.539062500 & 1.000000000 & .2460937500 \\ -.03125000000 & .1875000000 & -.4453125000 & .5078125000 & -.2460937500 & 0 \end{bmatrix}$$

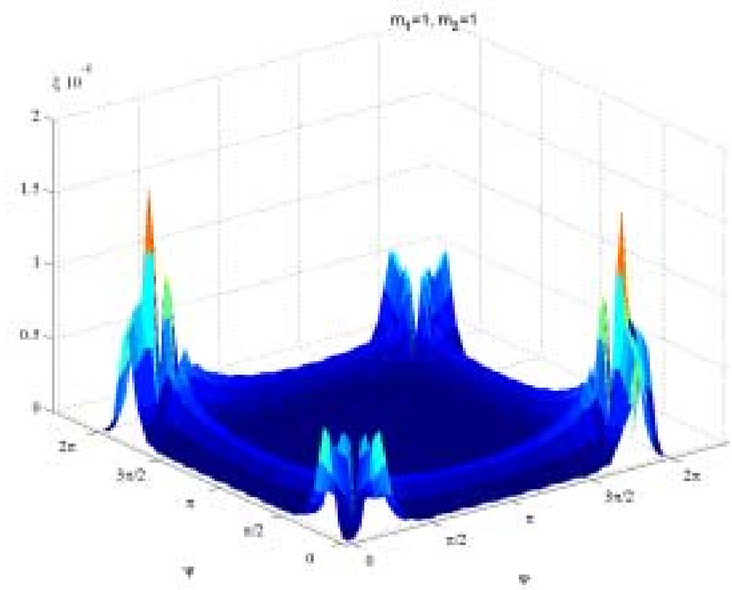
После вычисления рациональной аппроксимации типа Паде были получены следующие дробно рациональные функции и построены соответствующие графики ошибок аппроксимации:

1. $m_1 = 1, m_2 = 1$. Матрица коэффициентов числителя равна -

[1.0000	-4.0000	6.0000	-4.0000	1.0000;
-5.0000	20.0000	-30.0000	20.0000	-5.0000;
10.0000	-40.0000	60.0000	-40.0000	10.0000;
-10.0000	40.0000	-60.0000	40.0000	-10.0000;
5.0000	-20.0000	30.0000	-20.0000	5.0000],

а матрица коэфф-в знаменателя - [1.0000 -0.5000; -0.5000 0.0000].

График ошибки аппроксимации представлен на рисунке.



2. $m_1 = 4, m_2 = 4$. Матрица коэффициентов числителя равна -

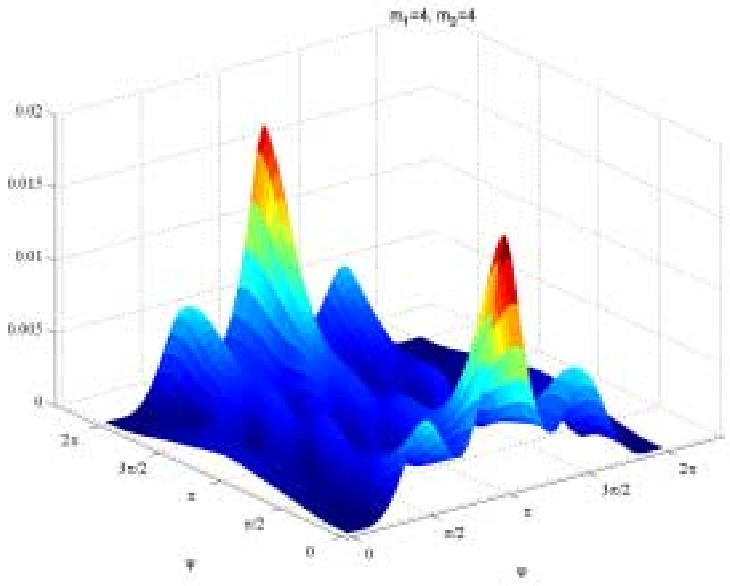
$10^4 \times$

[0.0001	-0.0011	0.0346	-0.1213	0.1577	-0.0766	-0.0015	0.0082	-0.0000;
-0.0011	0.0105	-0.1757	0.5880	-0.7614	0.3774	0.0019	-0.0401	0.0003;
0.0039	-0.0372	0.3692	-1.1384	1.4537	-0.7366	0.0109	0.0775	-0.0015;
-0.0072	0.0751	-0.4430	1.1448	-1.3783	0.7054	-0.0309	-0.0717	0.0036;
0.0100	-0.1111	0.4095	-0.7330	0.6979	-0.3235	0.0272	0.0287	-0.0039;
-0.0121	0.1286	-0.3753	0.4683	-0.2629	0.0520	0.0042	-0.0056	0.0022;
0.0106	-0.1035	0.2846	-0.3286	0.1540	0.0001	-0.0284	0.0135	-0.0015;
-0.0054	0.0482	-0.1275	0.1457	-0.0727	0.0013	0.0244	-0.0176	0.0023;
0.0011	-0.0095	0.0237	-0.0254	0.0122	0.0006	-0.0082	0.0078	-0.0018]

а матрица коэфф-в знаменателя –

[1.0000	-7.2175	316.1159	-74.4364	-40.9711;
-6.7113	33.2119	-54.7939	-11.3070	-1.9021;
0.7713	-28.1974	-10.6487	-7.7426	-3.8043;
-10.0235	63.8630	-13.5869	-11.6749	-7.6086;
5.5953 -	25.1361	-15.4834	-15.7159	-15.2171].

График ошибки аппроксимации представлен на рисунке.



Необходимо отметить, что тестовый пример импульсной характеристики был получен для ДРФ $H(x,y)=\dfrac{(1-x)^4(1-y)^5}{1-0.5x-0.5y}$. Таким образом, предложенный метод рациональной аппроксимации может быть использован для синтеза двумерных рекурсивных фильтров.

Список литературы

[1] V. Vavilov and M. Tchobanou. Multi-dimensional rational approximants of the Pade-type in transfer function computing. In Proc. The Second International Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000, pages 209-212, Zielona Gora, Poland, 2000.

[2] N. Bose. Multidimensional systems theory, chapter Multivariate rational approximants of the Pade-Type in systems theory . D. Reidel Publ. Comp., 1985.

[3] N. Bose and S. Basu. Two-dimensional matrix Pade approximants: existence, nonuniqueness, and recursive computation. IEEE Trans. Autom. Contr., 25(1):509-514, February 1980.

[4] J. Chisholm. Rational approximants defined from double power series. Math. Comp., 27:841-848, 1973.

[5] A. Gonchar and V. Vavilov. Rational approximations of functions of several complex variables. Journ. of Approx. Theory, 1999.

APPLICATION OF PADE TYPE RATIONAL APPROXIMANTS TO DESIGN OF TWO-DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS

* Tchobanou[2] M., ** Tchobanou P.

* Moscow Power Engineering Institute (Technical University), Dep-t of Electrical Physics, 13 Krasnokazarmennaya st., 105835, Moscow, RUSSIA

** Moscow State University, CSC Faculty, Vorobievy gory, MSU, 119899, Moscow, RUSSIA

Abstract. It is shown how to apply results received in [1], at synthesis of multidimensional recursive filters. The algorithm of rational approximation (of Pade type) for given two-dimensional impulse response of a digital filter is program realized.

The impulse response G(*z*1*, z*2) to be approximated is given by its Taylor power series

$$G(z_1,z_2)=\begin{bmatrix}1 & z_1 & z_1^2 & z_1^3\ldots\end{bmatrix}\begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & \ldots & h_{0(M-1)} \\ h_{10} & h_{11} & \ldots & h_{1(M-1)} \\ \ldots & & & \ldots \\ h_{(N-1)0} & h_{(N-1)1} & \ldots & h_{(N-1)(M-1)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ z_2 \\ z_2^2 \\ z_2^3\end{bmatrix}.$$

The generalized approximant [1, 2, 3] H(*z*1*, z*2) for given n = (*n*1*; n*2) and m = (*m*1*; m*2) is defined as the rational function

$$H(z_1,z_2)=\frac{\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} p_{i,j} z_1^i z_2^j}{\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{l=0}^{m_2} q_{k,l} z_1^k z_2^l}, \quad q(0,0)=1,$$

for which

$$G(z_1,z_2)\left[\sum_{k=0}^{m_1}\sum_{l=0}^{m_2} q_{k,l} z_1^k z_2^l\right]-\left[\sum_{i=0}^{n_1}\sum_{j=0}^{n_2} p_{i,j} z_1^i z_2^j\right]=\left[\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} v_{i,j} z_1^i z_2^j\right],$$

where v(*i; j*)=0 for (*i; j*)$\in$ I(n, m). The dimension of the determinative set I(n, m) equals τ(n, m).

The results of computer modeling show that the rational approximation of Pade type is a reliable method for recursive 2-D digital filter design.

References

[1] V. Vavilov and M. Tchobanou. Multi-dimensional rational approximants of the Pade-type in transfer function computing. In *Proc. The 2nd International Workshop on Multi-dimensional (nD) Systems NDS-2000*, pages 209–212, Zielona Gŕora, Poland, 2000.

[2] J. Chisholm. Rational approximants defined from double power series. *Math. Comp.*, 27:841–848, 1973.

[3] A. Gonchar and V. Vavilov. Rational approximations of functions of several complex variables. *Journ. of Approx. Theory*, 1999.

[2] The work was done under the support of the grant # 01-01-00738.