ПОСТРОЕНИЕ ОДНО- И ДВУМЕРНЫХ ШКАЛИРУЮЩИХ И ВЭЙВЛЕТ ФУНКЦИЙ[1]

Клюшкин В.И.

Московский энергетический институт (технический университет)
105835, ГСП, Москва Е-250, ул. Красноказарменная, д.17
Тел.: (095) 362 7463, E-mail: V_Oz_@toppen.ru

Вэйвлет анализ разработан для решения задач, для которых традиционный анализ Фурье не даёт удовлетворительных результатов. Одним из преимуществ, предоставляемых вэйвлет анализом является возможность производить местный анализ (анализ части длинного сигнала). Вэйвлет анализ способен показать те характеристики данных, которые другие способы анализа сигналов пропускают. К примеру: точки разрыва, разрывы в более высоких производных. Исходя из этого вэйвлет анализ позволяет сжимать или фильтровать зашумленные сигналы без ощутимых потерь полезного сигнала.

Первые вэйвлеты были построены Хааром в 1909 году. Для ряда приложений их вполне достаточно. Математическая система аксиом, скрытая за этой конструкцией, называется, в настоящее время, кратномасштабным анализом. В явном виде она была сформулирована осенью 1986 года С. Маллатом и И. Мейером. С её помощью в 1987 году И. Добеши построила бесконечную серию вэйвлетов, обладающих основным свойством системы Хаара – конечной длиной, и определяющихся более гладкими функциями.

В настоящей статье описана попытка применить методы построения и анализа одномерных вэйвлет функций к двумерному случаю. Методы описаны в [1].

При проектировании фильтров, учитываются такие ограничения как: ортогональность, линейность фазы, регулярность. Помимо этого сами фильтры могут быть разделимыми и неразделимыми, независимо от дискретизирующей решетки. Разделимые фильтры обладают таким преимуществом как, малая сложность вычислений. Неразделимые фильтры обладают большим числом степеней свободы и, следовательно, позволяют получить более хорошие результаты при проектировании.

Банки фильтров, обладающие свойством точного воспроизведения, могут быть использованы для получения базиса вэйвлет функций. Основой этой схемы является итерация банка фильтров по низкочастотной линии. Если НЧФ регулярный (его итерационно вычисленные копии сходятся к легко определяемым, по возможности, плавным функциям), то эта схема ведёт к базису вэйвлетов.

В одномерном варианте, децимация на N в N-канальном банке фильтров после итерирования приводит к шкалирующей функции $\phi(x)$ и определяется уравнением вида $\phi(x)=\sum_{n=0}^{N-1} c_n \phi(Nx-n)$. Наиболее хорошо изучен случай децимации на 2.

Многомерный случай более сложен. С точки зрения дискретной фильтрации, децимация определяется подрешеткой исходной решетки и представляется в виде матрицы расширения D (эквивалент децимации или или коэффициента расширения N в одномерном случае). Индексы точек, принадлежащих подрешетке, получаются как взвешенные целочисленные комбинации столбцов D. Для примера приведены возможные варианты матриц: двумерная решетка с элементами расположенными в шахматном порядке (неразделимая), квадратная решетка (неразделимая), соответственно:

$$D_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\quad D_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Шкалирующая функция, полученная при итерировании банка фильтров, также должна зависеть от выражения (1), определяемого матрицей D. Одно необходимое требование к матрице D: быть расширяемой во всех измерениях (иначе соответствующий вэйвлет не будет увеличивать разрешение во всех направлениях). Это эквивалентно требованию: все собственные значения D должны иметь величину строго больше 1.

---

[1] Работа выполнена в рамках гранта №Т00-3.1-1251 и программы № 208.04.04.042 Минобразования России.

Каскадный алгоритм.

Построить шкалирующую функцию $\phi(x)$ можно путём решения уравнения расширения. Входными данными являются коэффициенты фильтра c(0), … , c(N-1). Вычисления начинаются с прямоугольной функции $\phi^{(0)}(x)$ = 1 на [0, 1]. Далее итерации: $\phi^{(i+1)}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \phi^{(i)}(Nx - n).$

Алгоритм работает с функциями в непрерывном времени. Они кусочнопостоянны и длина отрезков составляет 2^{-i}. Если $\phi^{(i)}(x)$ сходится к предельной $\phi(x)$, то эта предельная функция является решением уравнения расширения. Довольно просто перейти от непрерывной функции *x(t)* к вектору *x(n)*. В таком случае функция принимает значения *x(n)* на *n*-ном временном интервале $n < t < n+1$. Таким образом, постоянный вектор *x* = (… 1,1,1 …) порождает функцию *x(t)*=1. Импульс *x* = (… 0,1,0 …) порождает стандандартную прямоугольную функцию. В общем случае, *x(t)* это кусочно-постоянная.

Итерации начинаются с прямоугольной функции $\phi^{(0)}(t)$. Каждая итерация состоит из двух шагов фильтрации и масштабирования. С алгебраической точки зрения данный процесс можно рассмотреть следующим образом. Пренебрегая масштабированием, проводить фильтрацию с коэффициентами h(k). Высоты прямоугольников будут 2/3, 1/3 , затем 4/9,2/9,2/9,1/9. В z-области это соответствует:

$$H(z) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}z^{-1} \qquad H(z^2)H(z) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9}z^{-1} + \frac{2}{9}z^{-2} + \frac{1}{9}z^{-3}.$$

Временные интервалы получаются длиной 1, 1/2, 1/4. Действительная высота графика удваивается на каждом шаге для сохранения площади. Но существенный интерес представляет произведение $H(z^2)H(z)$. После i шагов получим: $H^{(i)}(z) = \prod_{0}^{i-1} H(z^{2^k})$.

Это произведение в z-области эквивалентно итерированию низкочастотного фильтра *H*(*z*). Значения $\phi^{(i)}(t)$ – высота графика после i-й итерации – коэффициенты $2^i H^{(i)}(z)$. Множитель 2^i вводится для удвоений высоты, сохраняющих площадь, когда временные интервалы для $\phi^{(i)}(t)$ становятся равными 2^{-i}.

Заключение.

Результатами работы являются:

1. программа на С++, позволяющая производить сравнение результатов расчёта при разных условиях графически; сохранять результаты расчета в файл для дальнейшего использования (загрузить результаты расчёта и отобразить, и т.д.); проводить проверку регулярности функции методом конечных разностей; проводить подбор коэффициентов фильтра путем прямого редактирования их в дереве коэффициентов. Примененные методы программирования не позволяют получить результата с высокой точностью вычисления, из-за больших затрат ресурсов системы. Предстоит решить задачу эмулирования рекурсии.
2. Программный комплекс в среде MATLAB, выполняющий итерационное вычисление двумерных вэйвлет и шкалирующих функций с использованием различных решеток децимации. Данный комплекс является основой для построения многоканальной (многоскоростной) кратномасштабной системы обработки двумерных сигналов.
3. Программный комплекс в среде MATLAB, моделирующий двухканальную много уровневую систему обработки изображений. Комплекс позволяет проводить анализ влияния изменения параметров обработки и кодирования (фильтров, количества уровней обработки, усечения незначащих коэффициентов, битрейта, типа квантователя) на качество воспроизводимого сигнала. Оценка качества производится вычислением характеристик: среднеквадратичная ошибка (СКО MSE), корень СКО (RMSE), отношение максимальный сигнал/шум (PSNR), дБ.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Strang and T. Nguyen. Wavelets and Filter Banks. Prentice Hall, 1996.
2. M.Vetterli and C.Herley. Wavelets and filter banks: Theory and design, IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, pp. 2207-2232, Sept. 1992.
3. J.Kovacevic, M.Vetterli, Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n. IEEE Trans. Information Theory, vol. 38, No. 2, pp. 533-555, March. 1992.

CONSTRUCTION OF 1-D AND 2-D SCALING AND WAVELET FUNCTIONS

Klyushkin[2] V.

Moscow Power Engineering Institute
105835, GSP, Moscow E-250, 17 Krasnokazarmennaya st.
Tel: +7 (095) 362 7463? E-mail: V_Oz_@toppen.ru

The method of 1-D wavelet bases construction [1] is applied in 2-D case. It is based on iteration of low-pass part of the filter bank. If the low-pass filter is regular and gives rise to smooth functions, then this scheme leads to wavelet bases.

The task is solved for separable sublattice $D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ and non-separable one $D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

The dilation equation to be solved is $\phi(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \phi(D \cdot x - n)$, where $\phi(x)$ - is the scaling function to be defined, $\mathbf{c_n}$ – are the coefficients (impulse response) of the low-pass filter in the filter bank.

Cascaded algorithm

It begins from the initial scaling function $\phi^{(0)}(x) = 1$ на [0, 1]x[0, 1]. After that follow the iterations $\phi^{(i+1)}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \phi^{(i)}(Nx - n).$

Results

The program written in C++ allows one to obtain the I-th iteration fo the scaling function and to draw it. The regularity is checked by the method of finite differences.

REFERENCES

1. G. Strang and T. Nguyen. Wavelets and Filter Banks. Prentice Hall, 1996.
2. M.Vetterli and C.Herley, "Wavelets and filter banks: Theory and design," IEEE Trans. Signal Processing, vol. 40, pp. 2207-2232, Sept. 1992.
3. J.Kovacevic, M.Vetterli, "Nonseparable multidimensional perfect reconstruction filter banks and wavelet bases for R^n". IEEE Trans. Information Theory, vol. 38, No. 2, pp. 533-555, March. 1992.

[2] The work was done under the support of the grant # T00-3.1-1251 and of the program # 208.04.04.042 of MINOBRA-ZOVANIE of Russian Federation.