НОВЫЙ КЛАСС ВЕЙВЛЕТОВ НА ОСНОВЕ АТОМАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Гуляев Ю.В., Кравченко В.Ф., Смирнов Д.В.

Институт радиотехники и электроники РАН
103907, ГСП-3. ул. Моховая, Москва. E-mail: kravchenko_vf@fromru.com

В последнее время широко используются методы обработки данных основанные на вейвлет-преобразованиях [1,2], которые обладают существенными преимуществами по сравнению с преобразованием Фурье. Это можно объяснить тем, что вейвлет-преобразование позволяет анализировать не только частотный спектр сигнала, но также делать вывод о том, в какой момент времени появилась та или иная гармоника. Согласно [1,2] рассмотрим двухмасштабное соотношение

$$\phi(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k\phi(2x-k)\,, \qquad (1)$$

где $\phi(x)$ - масштабирующая функция. Коэффициенты p_k строятся на основе теории атомарных функций [3,4,5,6,7]. Такая последовательность называется двухмасштабной последовательностью для ϕ и принадлежит l_2. Это позволяет ввести следующее обозначение:

$$P(z)=P_\phi(z)=\frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k z^k\,. \qquad (2)$$

После преобразования Фурье (1) имеет вид

$$\hat{\phi}(\omega)=P(z)\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\,,\ z=e^{-i\omega/2}\,. \qquad (3)$$

Рассмотрим [1,2] рекуррентную схему следующего вида:

$$\phi_n(x)=\sum_k p_k\phi_{n-1}(2x-k)\,,\ n=1,2,.... \qquad (4)$$

для некоторой начальной функции ϕ_0. Для двухмасштабной последовательности B-сплайн второго порядка N_2, обеспечивает хороший выбор начальной функции. В связи с этим используется такая рекуррентная схема:

$$\begin{cases}\phi(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x), \quad где\\ \phi_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{N_\phi} p_k^\phi\phi_{n-1}(x-k), n=1,2,.....,\\ \phi_0(x)=N_2(x)\end{cases}. \qquad (5)$$

При выполнении вышеприведенных предположений о двухмасштабном символе P эта рекуррентная схема равномерно сходится. Последовательность $\{p_k\}$ может быть получена из соотношения:

$$\frac{1}{2}\sum_k p_k e^{-jk\omega/2}=\frac{\hat{\phi}(\omega)}{\hat{\phi}(\omega/2)}\,. \qquad (6)$$

Функция стоящая в левой части имеет период 4π, поэтому в правой части нам необходимо продлить функцию с периодом повторения 4π:

$$P(z)=\frac{1}{2}\sum_k p_k e^{-j\frac{\omega k}{2}}=\sum_k\hat{\phi}(\omega+4\pi k)\,. \qquad (7)$$

Из этого выражения можно получим формулу для вычисления коэффициентов p_k:

$$\begin{aligned}p_k&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\sum_k\hat{\phi}(\omega+4\pi k)\exp(-j\frac{\omega k}{2})d\omega=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{4\pi k}^{4\pi(k+1)}\hat{\phi}(\omega)\exp(-j\frac{\omega k}{2})d\omega=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\phi}(\omega)\exp(-j\frac{\omega k}{2})d\omega=\varphi(\frac{k}{2})\end{aligned} \qquad (8)$$

Исходя из (8) коэффициенты получим простой подстановкой в функцию $\phi(x)$ вместо переменной t значение $k/2$. Коэффициенты для разных атомарных функций приведены в таблице 1.

©электронная версия подготовлена ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru

Таблица 1. Коэффициенты $\{p_k\}$ W-систем на основе атомарных функций.

k	1	2	3	4	5	6	7
$\mathrm{up}(x)$	1.00000	0.93058	0.50000	0.06945	0	0	0
$\mathrm{fup}_2(x)$	0.642199	0.54026	0.31856	0.12562	0.05555	0	0
$\mathrm{fup}_3(x)$	0.58204	0.49504	0.30075	0.12563	0.03314	0.00883	0
$\mathrm{fup}_4(x)$	0.53651	0.46149	0.29133	0.13125	0.03983	0.00725	0.00117
$\Xi_2(x)$	1.32378	0.93746	0.37754	0.02334	0	0	0
$\Xi_3(x)$	1.4668	0.99167	0.26666	0.0081	0	0	0
$\Xi_4(x)$	1.63629	0.9932	0.18828	0.00293	0	0	0
$h_{1.5}(x)$	1.43157	1.31592	1.01109	0.26845	0	0	0
$h_2(x)$	1.00000	0.93056	0.50000	0.06944	0	0	0
$h_3(x)$	0.74999	0.74999	0.65300	0.234661	0	0	0

Если двухмасштабное соотношение для $\phi(x)$ представляется соотношением

$$\phi(x)=\sum_{k=0}^{N} p_k\phi(2x-k)\,, \qquad (9)$$

то двухмасштабное выражение для ортонормированного вейвлета $\psi(x)$ имеет вид

$$\psi(x)=\sum_{k=-N+1}^{1}(-1)^n p_{1-k}\phi(2x-k)\,. \qquad (10)$$

Алгоритм построения соответствует рекуррентной схеме (8). N_ϕ - количество ненулевых элементов для соответствующей функции. Построенные вейвлет-функции являются финитными и симметричными, что существенно отличает их от вейвлетов Добеши (свойство симметричности) и от других распространенных вейвлет-функций (свойство локализованности). Были проведены численные эксперименты для конкретных примеров. Показана эффективность и надёжность предложенной и обоснованной методики. Такой подход имеет важное практическое значение при цифровой обработке сигналов простой и сложной формы в различных радиотехнических приложениях.

Литература

1. *Daubechies Ingrid*, Ten Lectures on Wavelets., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsilvania, 1992.
2. *Mallat Stephane*, A Wavelet Tour of Signal Proccesing, Academic Press, 1998
3. *Кравченко В.Ф.* Новые синтезированные окна. ДАН РАН, 2002, т. 282, №2, с. 190-198.
4. *Кравченок В.Ф., Голубин М.В.* Спектральные свойства новых весовых функций в цифровой обработке сигналов. ЭВ и ЭС, 2002, т. 7. №2, с. 25-37.
5. *Кравченко В.Ф., Пустовойт В.И.* Новый класс весовых функций и их спектральные свойства. ДАН РАН, 2002, т. 386, №1, с. 38-42.
6. *Зелкин Е.Г., Кравченко В.Ф.* Современные методы аппроксимации в теории антенн. Кн.1: Задача синтеза антенн и новые методы их решения. М.: ИПРЖР. 2002.
7. *Кравченко В.Ф., Масюк В.М.* Современные методы аппроксимации в теории антенн. Кн.3: Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. М.: ИПРЖР. 2002.

A NEW CLASS OF WAVELETS ON BASIS OF ATOMIC FUNCTIONS

Gulyaev Yu., Kravchenko V., Smirnov D.

Radio Engineerings and Electronics Institute RAS
103907, GSP-3, Mohovaya str., Moscow, Russia
Tel: (095) 203-4793, Fax: (095) 203-8414, E-mail: kravchenko_vf@fromru.com

Was getting a new class of wavelet-functions on basis of atomic functions. This choise was based on special behaviour of this functions. Was calculated koefficients for doublescale equation

$$\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k \phi(2x-k) \tag{1}$$

for different atomic functions. Calculation carried out with Fourier transform. On basis of this coefficients was build new classs of wavelets using folowing recurrence relations:

$$\begin{cases} \phi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n(x) \\ \phi_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{N_\phi} p_k^\phi \phi_{n-1}(2x-k), n = 1,2,... \\ \phi_0(x) = N_2 \end{cases} \tag{2}$$

where N_2 - B-spline, N_ϕ - a number of nonzero coefficients. Was calculated their characteristics. They was compare with most famous wavelts such as Dobeshi, Meyer, Shanon functions. Using new functions was carried out analysis and shown effectiveness and reliability of developed method.