ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРАХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ОКРУГЛЕНИЕМ*

Брюханов Ю.А.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, Советская, 14.
Тел/факс (0852) 305-319, e-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

Реферат: Исследованы процессы в фильтрах нижних и верхних частот с округлением результатов сложения. С помощью метода точечных отображений рассмотрены свободные колебания и колебания при постоянном внешнем воздействии. Получены выражения для расчета наиболее вероятных режимов при произвольном числе уровней квантования.

Цифровые рекурсивные цепи первого порядка используются при построении фильтров нижних и верхних частот [1]. Специфическими для цифровых фильтров являются ошибки, вызванные конечным числом двоичных разрядов в представлении чисел.

Цель данной работы – исследование свободных колебаний и колебаний при постоянном входном воздействии в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка, использующих представление чисел с фиксированной запятой в прямом и обратном кодах, с округлением результатов сложения при произвольном числе уровней квантования L.

Полагаем, что сумматор имеет характеристику с насыщением, а шаг квантования равен единице. Характеристика квантователя (сумматора) выражается функцией

$$f(\varphi)=\begin{cases}[\varphi+1/2\,sign\,\varphi] & \text{при } 0\le|\varphi|<N-1/2\\ N\,sign\,\varphi & \text{при } |\varphi|\ge N-1/2,\end{cases}$$

где [.] – целая часть числа, $N=(L-1)/2$. Участки характеристики, соответствующие значениям $[\varphi+1/2\,sign\,\varphi]$, обозначим 0, ±I, ±II, …, ±N.

В общем случае колебания в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка описываются нелинейным разностным уравнением

$$x(n+1)=f(ax(n)+u(n)),$$

где $x(n+1)$ – реакция фильтра, a – параметр фильтра, $u(n)$ – входное воздействие. Введем фунцию $y(n)=x(n+1)$. Процессы исследуем на плоскости состояний (x,y) методом точечных отображений [2]. В нашем случае функция последования имеет вид $y(n)=f(ax(n)+u(n))$. Как и в [3], плоскость состояний разобьем на области соответственно участкам характеристики сумматора. Обозначим эти области, как и соответствующие участки.

В зависимости от начального состояния $x(0)$ в фильтре возможны различные движения. Вероятности P движения B определяется как $P(B)=m/L$, где m – количество начальных состояний, соответствующих движению B. Параметр фильтра a выбираем в области устойчивости без учета эффектов квантования, т.е. $0<|a|<1$.

В отсутствие входного воздействия ($u(n)=0$) в зависимости от знака и величины параметра a графики функций последования и биссектрисы $y=x$ могут пересекаться в одной или нескольких точках. Исследования показали, что при $a>0$ (цепи является фильтром нижних частот (ФНЧ)) в общем случае произвольного L на выходе фильтра в установившемся режиме имеем наиболее вероятное значение $x=\pm X$ (т.е. имеем $T=1(\pm X)$), где $0<X<$N, если на диаграмме Ламерея точки X и $X+1$ принадлежат области X. Это означает выполнение условия

$$(X-1/2)\le a<(X+1/2)/(X+1).$$

При $X=0$ с вероятностью $P=1$ выполняется условие $0<a<1/2$. В диапазоне $(N-1/2)/N\le a<1$ имеем равновероятные движения $T=1(\pm X)$, где $X\in[0;N]$. В качестве примера на рис.1 приведена вероятностная диаграмма свободных колебаний в ФНЧ при $L=11$.

При $a<0$ (цепи является фильтром верхних частот (ФВЧ)) на выходе фильтра имеем $X=0$, если на диаграмме Ламерея точка $X=1$ принадлежит области 0. Откуда следует $-1/2<a<0$. При других значениях параметра a наиболее вероятными являются установившиеся колебания с периодом $T=2$ и мгновенными значениями $x\in\{X;\ -X\}$ (ниже это обозначим $T=2(X/-X)$), где $0<X<N$, если точки X и $X+1$ принадлежат области $-X$. Это означает выполнение условия

$$-(X+1/2)/(X+1)<a\le-(X-1/2)/X.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования России

При $-1<a\le(N-1/2)/N$ имеем $T=0$ с вероятностью $P(0)=1/L$ и $T=2(X/-X)$, где $X\in[0;N]$ с вероятностью $P(X/-X)=2/L$.

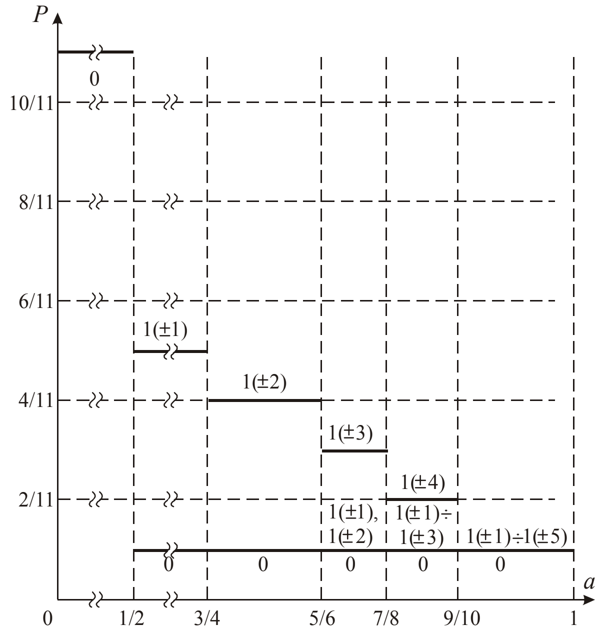

Рис. 1. Вероятностные диаграммы автономной цепи при $L=11$ для ФНЧ

Если входное воздействие отлично от нуля и постоянно, т.е. $u(n)=A$, то на диаграмме Ламерея график функции последования пересекает ось ординат в точке $y=A$, при этом $\varphi=A$. Рассмотрим случай $A>0$. Для установления закономерностей исследованы колебательные режимы при различных значениях величин L и A в диапазоне изменения параметра $0<|a|<1$. Это позволило построить бифуркационные и вероятностные диаграммы вынужденных колебаний в ФНЧ и ФВЧ. В качестве иллюстрации на рис.2 изображена вероятностная диаграмма колебаний в ФНЧ при $L=11$, $A=1$. В общем случае произвольного $0<A<N$ на выходе ФНЧ имеем наиболее вероятное движение $T=1(X)$, где $A<X<N$, если на диаграмме Ламерея точки $X-1$ и X принадлежат области X. Это означает выполнение условия

$$(X-1/2-A)/(X-1)\le a<(X+1/2-A)/X\,.$$

При $X=A$ необходимо пользоваться соотношениями $0<a<1/(2A)$. В случае $X=N$ необходимо, чтобы точка $N-1$ принадлежала области N, это означает $(N-1/2-A)/(N-1)\le a<1$. При $A=N$, $a\in(0;1)$ на выходе фильтра имеем единственное установившееся движение $T=1(N)$.

Вероятностная диаграмма вынужденных колебаний в ФВЧ при $L=11$, $A=5$ представлена на рис.3. В общем случае произвольного $1<A<N$ на выходе такого фильтра в установившемся режиме имеем наиболее вероятное движение $T=1(X)$, где $1<X\le A$, если точки $X-1$ и X принадлежат области X. Это означает выполнение условий

$$(X-1/2-A)/X\le a<(X+1/2-A)/(X-1) \qquad (1)$$

или

$$(X-1/2-A)/(X+1)\le a<(X+1/2-A)/X\,. \qquad (2)$$

При $X=1$ следует пользоваться условием (2). В случае $A=1$ единственным колебанием с периодом меньшим $T=2$ является $T=1(1)$ при условии

$$-1/2\le a<0\,. \qquad (3)$$

Другим по сравнению с определяемыми из (1)-(3) областями параметра $a<0$ соответствуют наиболее вероятные колебания с периодом $T=2$.

Полученные закономерности позволяют установить зависимость $X(a)$ для произвольных L и A. Эту зависимость можно сравнить с идеальной при $L=\infty$, которая рассчитывается с помощью методики, разработанной в [4].

Из-за симметричности характеристики сумматора (квантователя) колебания на выходе фильтра при $A<0$ с периодом $T=1$ отличаются только знаками амплитуд, а колебания с периодом $T=2$ - только знаками мгновенных значений для совпадающих со случаем $A>0$ значений параметра a. Теоретические результаты подтверждены компьютерным моделированием.

Полученные закономерности нетрудно распространить и на случай, когда переменные представляются в форме чисел с выравниванием слева (т.е. в виде дробных чисел). Для этого достаточно ввести новую переменную $\bar{x} = xq$, где q=1/N - шаг квантования.

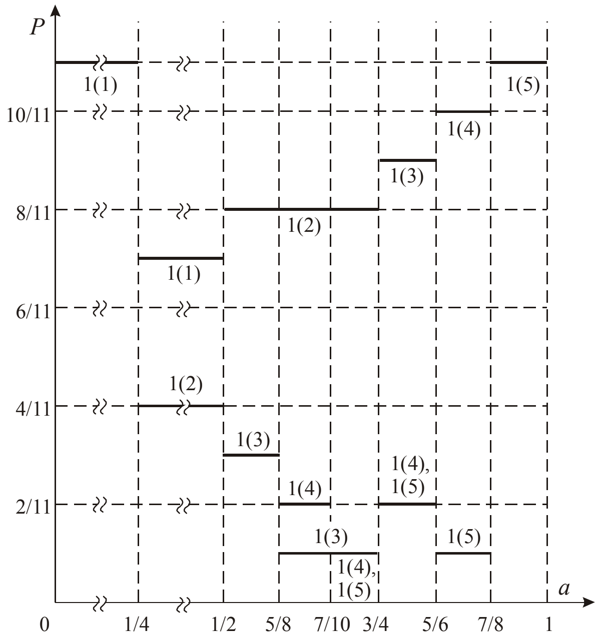

Рис.2. Вероятностные диаграммы при L=11 для ФНЧ при A=1

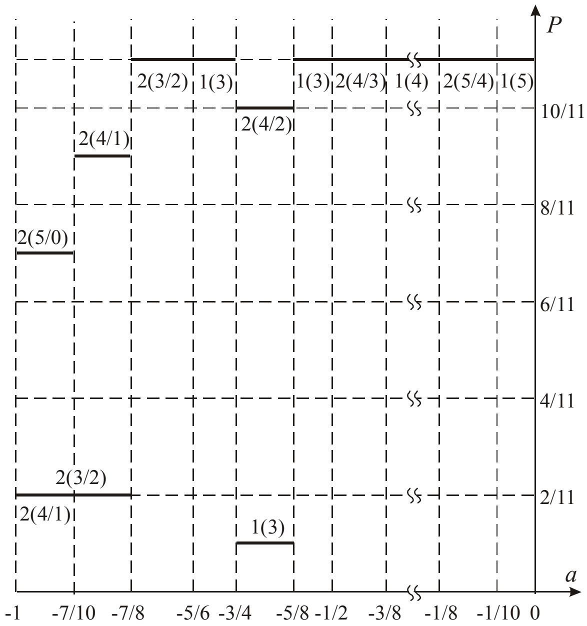

Рис.3. Вероятностные диаграммы при L=11 для ФВЧ при A=5

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.:Наука, 1987.
3. Брюханов Ю.А. Эффекты квантования в цифровых рекурсивных фильтрах первого порядка с усечением по модулю // 4-я Международ. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». Докл. Т.1. Москва. 2002. С.67
4. Брюханов Ю.А. Колебания в нелинейных рекурсивных цифровых цепях первого порядка при постоянном внешнем воздействии // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1999. Т.7, №4. С29.

EFFECTS OF QUANTIZATION IN DIGITAL FIRST-ORDER RECURSIVE FILTERS WITH ROUND-OFF*

Bryuhanov Yu.A.

Yaroslavl State University
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaya st., 14
Phone (Fax) (0852) 305-319. E-mail: bruhanov@uniyar.ac.ru

Abstract: Processes in filters of low and high frequencies with rounding of summarizing results are investigated. Oscillations with constant external action are analyzed. Expressions for calculation of the most probable modes with arbitrary-level of quantization are obtained.

The purpose of the present work is the research of free oscillations and oscillations under constant external influence in digital recursive filters of the first order, with representation of numbers with a fixed point in direct or inverse codes with rounding of summarizing results with arbitrary-level of quantization *L*.

It is expected, that adder has the characteristic with a saturation and the step of quantization is equal to unit.

The oscillations are described by the follows difference equation

$$x(n+1) = f(ax(n)+u(n)).$$

With the help of a technique suggested in [1] processes are investigated at various *L*. In absence of entrance influence ($u(n)=0$) at the output of low pass filter in the established mode we have the most probable value $x=\pm X$ ($T=1(\pm X)$), where $0<X<N$ if, follows condition satisfied.

$$(X-1/2) \le a < (X+1/2)/(X+1).$$

At $X=0$ with probability $P=1$ the next condition satisfied $0<a<1/2$. In a range $(N-1/2)/N \le a < 1$ we have equiprobable movements $T=1(\pm X)$, where $X \in [0;N]$, $N=(L-1)/2$. At the output of high pass filter at $u(n)=0$ we have $X=0$ if $-1/2<a<0$. At another quantity of *a* the most probable are oscillations with the period $T=2$ and values $x \in \{X; -X\}$ (below it's designated $T=2(X/-X)$), where $0<X<N$ if follows condition satisfied.

$$-(X+1/2)/(X+1) < a \le -(X-1/2)/X.$$

If external influence $u(n)=A$ at the output of the low pass filter we have the most probable movement $T=1(X)$, where $A<X<N$ at performance of the condition

$$(X-1/2-A)/(X-1) \le a < (X+1/2-A)/X.$$

At the output of the high pass filter we have movement $T=1(X)$, where $1<X \le A$, if follows ratios are true

$$(X-1/2-A)/X \le a < (X+1/2-A)/(X-1)$$

or

$$(X-1/2-A)/(X+1) \le a < (X+1/2-A)/X$$

Another areas of parameter $a<0$ correspond the most probable oscillations with period $T=2$.

The received laws allows us to calculate dependence $X(a)$ for any *L* and *A*. All theoretical outcomes have affirmed by computer simulation.

REFERENCES

1. Bryuhanov Yu.A. Effects of quantization in digital first order recursive filters with modulus truncation // 4th Internat. Conf. "Digital signal processing and its applications". Proc. V.1. Moscow. 2002. P.70.

* Work is supported by Russian Foundation of Fundamental Research and Ministry of Education of Russian Federation