ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИФРОВОГО ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ФИЛЬТРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В АВТОНОМНОМ РЕЖИМЕ*

Волков Д.Б., Саутов Е.Ю.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, Советская, 14.
Тел.: (0852) 797775, e-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Реферат: Исследован цифровой полиномиальный фильтр первого порядка в автономном режиме. Построен бифуркационный портрет системы без линейного звена. Найдены особые точки и границы их устойчивости в системе при наличии линейного звена.

Введение

Задача исследования полиномиальных фильтров была поставлена ещё в 1960-х годах. Это было вызвано необходимостью решения вопросов фильтрации сложных сигналов, например таких, где шум и сигнал находятся в определённой зависимости [1,2]. Выяснилось, что линейная фильтрация в подобных случаях неэффективна, и требуются новые методы для решения подобных задач. Позднее стало известно, что, цифровые полиномиальные фильтры эффективны в нелинейных акустических эхо-компенсаторах при использовании их с целью подавления эха в различных акустических и видеосистемах. Двумерные полиномиальные фильтры, также, применяются для улучшения чёткости изображений, например таких, как рентгеновские снимки. Рекурсивные полиномиальные фильтры используются для борьбы с нелинейными искажениями в различных каналах связи.

В работе исследован простейший полиномиальный фильтр в автономном режиме со схемой без линейного звена и при наличии линейного звена. Затронут вопрос устойчивости данной системы.

1. Цифровой полиномиальный фильтр без линейного звена

В общем случае простейший полиномиальный рекурсивный цифровой фильтр можно описать уравнением

$$y(n) = A + by^2(n-1) + cy(n-1), \qquad (1.1)$$

где A – постоянное входное воздействие, b и c – параметры фильтра.

Начнём исследования при следующем выборе параметров: A=0, c=0. Рассмотрим простейший цифровой полиномиальный фильтр, который математически можно представить в виде

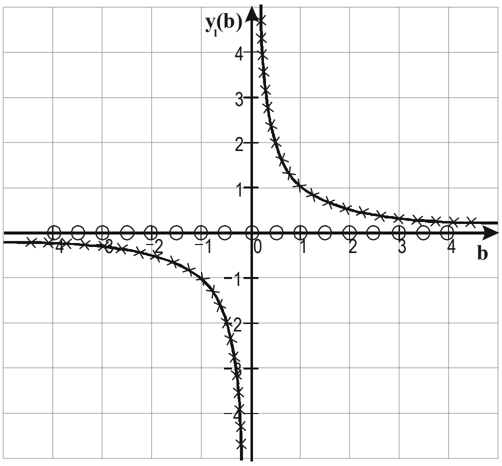
$$y(n) = by^2(n-1) \qquad (1.2)$$

Сделав замену ($y(n+1) = by^2(n)$, $y(n+1) = y_1(n)$), перепишем уравнение (1.2) в более удобном для дальнейших исследований виде

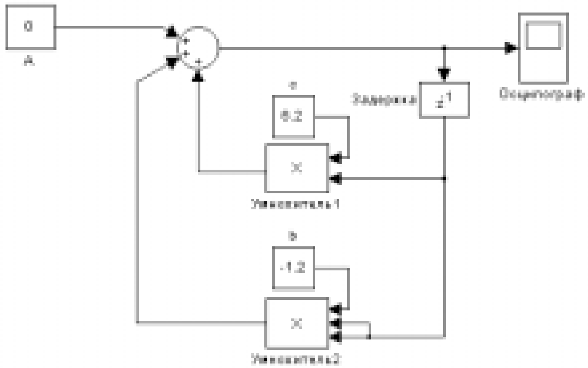
$$y_1(n) = by^2(n) \qquad (1.3)$$

Пользуясь методом одномерных точечных отображений [3], исследуем данную систему на устойчивость. Найдём точки пересечения биссектрисы $y_1(n)=y(n)$ и функции последования $f(y) = by^2(n)$. Квадратное уравнение $by^2(n) – y(n) = 0$ имеет два корня: $y_{(1)}=0$ и $y_{(2)}=1/b$. По теореме Кенигса особая точка $y_{(1)}=0$ устойчива, в то время как точка $y_{(2)}=1/b$ является неустойчивой. Устойчивость точки $y_{(1)}=0$ зависит от выбора начальных условий. Область устойчивости данной точки можно задать системой неравенств (1.4). Руководствуясь полученными результатами можно построить бифуркационный портрет данной системы (рис.1а), где устойчивые состояния равновесия отмечены кружками, неустойчивые – крестиками.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования России



а) Бифуркационный портрет системы без линейного звена



b) Модель цифрового полиномиального фильтра первого порядка

Рис. 1

$$\begin{cases} |\,\mathrm{y}_{(0)}(\mathrm{b})\,| < 1/\mathrm{b}, \text{ для } \mathrm{b} > 0 \\ |\,\mathrm{y}_{(0)}(\mathrm{b})\,| > 1/\mathrm{b}, \text{ для } \mathrm{b} < 0 \end{cases} \qquad (1.4)$$

Модель исследуемого цифрового фильтра построена в пакете MatLab 6.0 (Simulink 4) и показана на рис.1b. Входное воздействие A=0, линейное звено отсутствует (c=0). Изменяя параметр b и начальные условия, можно с помощью осциллографа анализировать поведение данной системы.

2. Цифровой полиномиальный фильтр при наличии линейного звена

Рассмотрим разностное уравнение

$$y_1(n) = by^2(n) + cy(n). \qquad (2.1)$$

Найдём неподвижные точки данной системы.

При c = 1 функция последования и биссектриса имеют одну общую точку – точку касания, в системе существует единственное состояние равновесия в нуле, которое в зависимости от выбора начальных условий может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Область устойчивости можно отобразить системой неравенств 2.2.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{b} < y(0) < 0 \;\; для\, b > 0 \\ 0 < y(0) < -\dfrac{1}{b} \;\; для\, b < 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

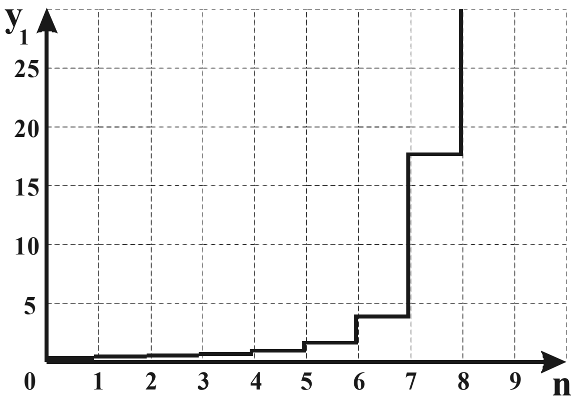
При $c \neq 1$ в системе можно наблюдать две неподвижные точки. Особая точка $y_{(1)}(n) = 0$ устойчива по теореме Кенигса при |c| < 1 (-1 < c < 1) и начальных условиях 2.3.

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{b} < y(0) < \dfrac{1-c}{b} \;\; для\, b > 0, \\ \dfrac{1-c}{b} < y(0) < -\dfrac{1}{b} \;\; для\, b < 0. \end{cases} \qquad (2.3)$$

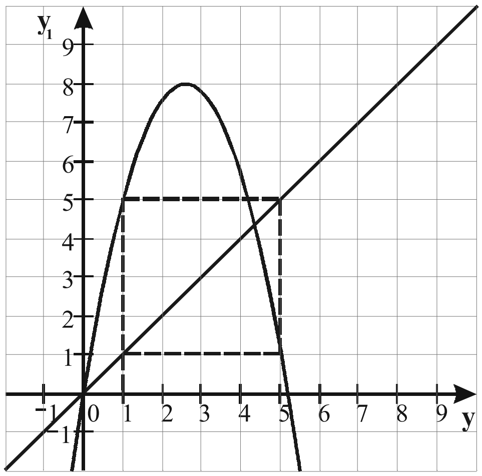
Точка $y_{(2)}(n) = (1\text{-}c)/b$ устойчива при |2-c| < 1 (1 < c < 3) и начальных условиях 2.4.

$$\begin{cases} -\dfrac{c}{b} < y(0) < 0 \;\; для\, b > 0, \\ 0 < y(0) < -\dfrac{c}{b} \;\; для\, b < 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

На рис.2a показана осциллограмма случая, когда начальные условия выбраны вне интервала устойчивости. При выборе параметров, отвечающих неравенствам 2.2 система устойчива и на выходе системы с течением времени устанавливается нулевое значение.



а) Осциллограмма при c = 1, b = 1, y(0) = -1.2
(случай потери системой устойчивости)



b) Диаграмма Кенигса-Ламерея
(предельный цикл T=2)

Рис. 2

Несмотря на, казалось бы, «послушное» поведение системы, кроме ограниченно-устойчивых состояний равновесия возможны, также, периодические движения. На рис.2b показана диаграмма Кенигса-Ламерея неустойчивого предельного цикла T = 2, который реализуется при следующем выборе параметров и начального условия: c=6.2, b= -1.2, y(0)=1.

Заключение

Рассмотрен простейший полиномиальный цифровой фильтр в автономном режиме. Найдены особые точки в системе, условия их устойчивости. Из полученных результатов видно, что данная система является устойчивой в ограниченном интервале параметров и начальных условий. В связи с этим необходимо дальнейшее исследование системы при постоянном внешнем воздействии для выяснения специфики данных фильтров и нахождения области их применения.

Литература

1. Щербаков М.А. Нелинейная фильтрация сигналов и изображений. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 1999 – 166 с.
2. Щербаков М.А., Стещенко В.Б., Губанов Д.А. Цифровая полиномиальная фильтрация в реальном масштабе времени: алгоритмы и пути реализации на современной элементной базе // «Цифровая обработка сигналов» №1, 2000 - с. 19-26.
3. Гаушус Э.В. Исследование динамических систем методом точечных преобразований. М.: Наука, 1976. 368 с.

RESEARCH OF THE FIRST ORDER DIGITAL POLYNOMIAL FILTER IN AN AUTONOMOUS MODE*

Volkov D., Sautov E.

Yaroslavl State University
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaya st., 14
Phone: (0852) 797775. E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

The problem of research of digital polynomial filters causes interest of scientists since 1960 years. It was caused by necessity of the decision of questions of filtration complex signals, for example such signals where noise and signal are in the certain dependence. It was found, that the linear filtration in similar cases is inefficient, and the new methods for the decision of these tasks are required. Digital polynomial filters are effective in nonlinear acoustic echo - equalizers at use them with the purpose of suppression of an echo in various acoustic and videosystems. Two-dimensional polynomial filters, also, are applied to improvement of sharpness of the images, for example such, as x-ray snapshots. Recursive polynomial filters are used for struggle with nonlinear distortions in various channels of communication.

In the purpose work elementary polynomial filter is investigated in an autonomous mode with the circuit without a linear part and at presence of a linear part. The question of stability of the given system is considered.

Generally elementary polynomial recursive digital filter can be described by follows equation

$$y(n)=A+by^2(n-1)+cy(n-1), \qquad (1)$$

where A - constant entrance influence, b and c - parameters of the filter.

Using a method of one-dimensional dot mapping, find the fixed points in system.

At A=0, c=0 in system there are two fixed points. According to Kenigs theorem we have found, that the fixed point $y_{(1)}=0$ is steady, while the point $y_{(2)}=1/b$ is unstable. The stability of a point $y_{(1)}=0$ depends on a choice of the entry conditions. The received results allow us to construct the bifurcation diagram.

At A=0, c≠0 we have two cases. At c = 1 in system there is a unique fixed point in zero point, which depending on a choice of the entry conditions can be as steady, as not steady.

At c≠1 in system it is possible to observe two condition of equilibrium. The fixed point $y_{(1)}(n)=0$ is steady according to Kenigs theorem at $|c| < 1$ ($-1 < c < 1$). The point $y_{(2)}(n) = (1-c)/b$ is steady at $|2-c| < 1$ ($1 < c < 3$).

Except of stable and unstable fixed points in system, also, periodic movements are possible. For example, at c = 6.2, b = -1.2, y(0) = 1 in system there is a unstable limiting cycle of the period 2.

The analysis of the received results shows, that this system is steady in the limited interval of parameters and entry conditions. The research of system at constant external influence will allow us to understand specificity of the given filters and to define areas of their application.

* Work is supported by Russian Foundation of Fundamental Research and Ministry of Education of Russian Federation