ПРИРОДА ЭФФЕКТА НИЗКОЙ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА К ТОЧНОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Лесников В.А

Вятский государственный университет, кафедра радиоэлектронных средств
610000, г. Киров, ул. Московская, 36,
тел. (833-2)-693295, факс (833-2)-626578, e-mail: lesnlex@mail.ru

Реферат. Показано, что эффект низкой чувствительности параметров цифровых фильтров к точности представления коэффициентов некоторых структур объясняется структурой коэффициентов канонической формы передаточной функции, которые представляют собой сумму произведений коэффициентов соответствующей структуры.

Известно, что цифровой фильтр (ЦФ) с заданной передаточной функцией может быть реализован при помощи разных вариантов структурных схем. Реализации ЦФ различаются уровнем шумов округления результатов арифметических операций, чувствительностью к точности представления коэффициентов, уровнем паразитных колебаний предельного цикла и т. п. Среди множества различных реализаций особенное место занимают структуры с низкой чувствительностью амплитудно-частотной характеристики к точности представления коэффициентов.

В настоящей работе предлагается объяснение факта различия требуемой разрядности коэффициентов ЦФ с различными структурами.

Каноническое представление передаточной функции любого ЦФ имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{z})=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{z}^i \Bigg/ \left(1-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{b}_i\mathbf{z}^i\right). \qquad (1)$$

Множество коэффициентов $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ описывает ЦФ с любой структурой. Но эти коэффициенты являются коэффициентами ЦФ только для некоторых структур (прямой, канонической форм), т. е. при реализации алгоритма цифровой фильтрации реально выполняются операции умножения на другие коэффициенты.

В работах [1, 2] показано, для ЦФ с произвольной структурой справедливо соотношение

$$\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{z}^{-1})=\frac{1}{\vec{\mathbf{X}}(\mathbf{z})}\vec{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})=\left(\mathbf{E}-\mathbf{T}(\mathbf{z}^{-1})\right)^{-1}, \qquad (2)$$

где $\overline{\mathbf{H}}(\mathbf{z}^{-1})=\left[\mathbf{H}_{ij}(\mathbf{z}^{-1})\right]$ – матрица передаточных функций ЦФ в случае, если узлы $\mathbf{j}$ и $\mathbf{i}$ являются соответственно входным и выходным узлами ЦФ (размерность матрицы $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$); $\vec{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})$ – $\mathbf{N}$-мерный вектор $\mathbf{z}$-преобразований отсчетов, вычисляемых во всех узлах ЦФ; $\vec{\mathbf{X}}(\mathbf{z})$- $\mathbf{N}$-мерный вектор $\mathbf{z}$-преобразований отсчетов последовательностей входных сигналов, поступающих в узлы ЦФ (только одна из этих последовательностей отлична от нулевой); $\mathbf{N}$ - число узлов структурной схемы ЦФ; $\mathbf{E}$ - единичная матрица размерностью $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$; $\mathbf{T}(\mathbf{z})$ - топологическая матрица размерностью $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$, элементы с индексами $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

В работе автора [2] предложен способ получения всех возможных структур цифровых фильтров (ЦФ), основанный на генерации топологических матриц $\mathbf{T}(\mathbf{z}^{-1})$. В [3, 4], автор показал, что коэффициенты $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$ канонического представления передаточной функции для любой структуры ЦФ представляют собой суммы произведений коэффициентов данной структуры.

Уточним, введенное в [4] обозначение произвольной структуры ЦФ. Оно будет иметь вид

$$\mathbf{N}\{\mathbf{N}\}\mathbf{z}\{\mathbf{n}\}\mathbf{p}\{\mathbf{P}_1\}\mathbf{d}\{\mathbf{N}_1\}\ldots\mathbf{p}\{\mathbf{P}_n\}\mathbf{d}\{\mathbf{N}_n\}. \qquad (3)$$

Вместо символов в фигурных скобках подставляются конкретные значения, характеризующие структуру ЦФ. $\mathbf{N}$, $\mathbf{n}$, – переменные, уже определенные выше. $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{N}_i$ – числа, определяющие положение $\mathbf{n}$ квадратных подматриц $\mathbf{T}_i(\mathbf{z}^{-1})$ в матрице $\mathbf{T}(\mathbf{z}^{-1})$. Главные диагонали подматриц $\mathbf{T}_i(\mathbf{z}^{-1})$ лежат на главной диагонали матрицы $\mathbf{T}(\mathbf{z}^{-1})$. Последние элементы первой строки

©электронная версия подготовлена ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru

подматриц равны $\mathbf{z}^{-1}$. Элементы с индексами $\mathbf{P_i}, \mathbf{P_i}$ матрицы $\mathbf{T}(\mathbf{z}^{-1})$ являются элементами с индексами 1,1 матрицы $\mathbf{T_i}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$. $\mathbf{N_i}$ - размерность подматриц.

Определим разбиение множества всех возможных структур с фиксированным $\mathbf{n}$ на классы эквивалентности таким образом, что в класс входят структуры

$$\mathbf{Str}(\mathbf{n};\mu_2-\mu_1,\ldots,\mu_n-\mu_1,\mathbf{N}_1,\ldots\mathbf{N}_n)=\mathbf{N}\{\mathbf{N}\}\mathbf{z}\{\mathbf{n}\}\mathbf{p}\{\mu+\mu_1\}\mathbf{d}\{\mathbf{N}_1\}\ldots\mathbf{p}\{\mu+\mu_n\}\mathbf{d}\{\mathbf{N}_n\} \quad (4)$$

Классы эквивалентности характеризуются одинаковыми выражениями коэффициентов $\mathbf{b_i}$, через коэффициенты ЦФ, которые полностью определяется подматрицей $\mathbf{T_0}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$, являющейся квадратной матрицей с минимальным порядком, включающей в качестве подматриц все матрицы $\mathbf{T_i}(\mathbf{z}^{-1})$. Иначе говоря, коэффициенты $\mathbf{b_i}$ не зависят от $\mathbf{N}$, μ и μ_1. Структура же коэффициентов $\mathbf{a_i}$ определяется всей матрицей $\mathbf{T}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$.

Для примера рассмотрим класс эквивалентности $\mathbf{Str}(2;2,3,3)$. В этом классе структура коэффициентов $[\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}]$ имеет вид (2,3), т. е. $\mathbf{b_1}$ и $\mathbf{b_2}$ представляют собой такие суммы произведений коэффициентов ЦФ, что максимальные числа сомножителей в слагаемых равны соответственно 2 и 3. В представленной ниже таблице показана структура коэффициентов $[\mathbf{a_0}, \mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}]$ для этого класса (символ С в таблице означает, что соответствующий коэффициент равен константе 1, 0 или –1).

1,0,0	C,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0
2,0,0	1,0,0	C,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0	0,0,0
3,5,5	2,4,4	1,3,3	C,2,0	0,1,2	0,C,0	0,0,1	0,0,C	0,0,0	0,0,0
4,6,5	3,5,4	2,4,3	1,3,0	C,2,2	0,1,0	0,0,2	0,0,1	0,0,0	0,0,0
5,6,0	4,5,0	3,4,0	2,3,0	1,2,0	C,0,0	0,1,0	0,C,0	0,0,0	0,0,0
6,6,5	5,5,4	4,4,3	3,3,0	2,2,2	1,2,0	C,2,2	0,1,2	0,0,0	0,0,0
7,6,0	6,5,0	5,4,0	4,0,0	3,3,0	2,3,0	1,3,0	C,2,0	0,0,0	0,0,0
8,7,6	7,6,5	6,5,4	5,4,0	4,4,3	3,4,0	2,4,3	1,3,3	C,0,0	0,0,0
9,8,7	8,7,6	7,6,5	6,5,0	5,5,4	4,5,0	3,5,4	2,4,4	1,0,0	C,0,0
10,9,8	9,8,7	8,7,6	7,6,0	6,6,5	5,6,0	4,6,5	3,5,5	2,0,0	1,0,0

Части таблицы вида $\boxed{\mathbf{T_i}}$ представляют собой подматрицы $\mathbf{T_i}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$, $\mathbf{i}=\mathbf{1}\ldots\mathbf{n}$, а часть таблицы в виде $\boxed{\mathbf{T_0}}$ - подматрица $\mathbf{T_0}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$. Матрицы $\mathbf{T}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ формируются таким образом, что главная диагональ матрицы $\mathbf{T_0}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ является частью главной диагонали матрицы $\mathbf{T}\left(\mathbf{z}^{-1}\right)$ (таблица, вообще говоря, является бесконечной, изображена только ее часть, показанная как Таблица.

Показан пример формирования матрицы $\boxed{\mathbf{T}}$, изображающей структуру $\mathbf{N}\{8\}\mathbf{z}\{2\}\mathbf{p}\{2\}\mathbf{d}\{3\}\mathbf{p}\{4\}\mathbf{d}\{3\}$. Каждая ячейка матрицы соответствует ЦФ, входом которого является узел с номером $\mathbf{inp}=\mathbf{j}$ ($\mathbf{j}$ - номер столбца), а выходом - $\mathbf{out}=\mathbf{i}$ ($\mathbf{i}$ - номер строки).

Предположим, что коэффициенты канонической формы ЦФ, для реализации которого используется арифметика с фиксированной запятой, имеют одинаковую разрядность мантиссы, равную $\mathbf{m}$. Квантование коэффициентов ЦФ приводит, как это показано в работе автора [3], приводит к дискретизации $\mathbf{z}$-плоскости, т. е. нули и полюсы такого фильтра могут располагаться в узлах сетки, образованной пересечением эквидистантно расположенных прямых, параллельных оси ординат, с расстоянием между соседними прямыми, равным $\mathbf{2}^{-\mathbf{m}}$, и концентрических окружностей с центром в точке $(\mathbf{0},\mathbf{0})$ с квадратами радиусов, равных $\mathbf{r}_\mathbf{s}^2=\mathbf{s}\mathbf{2}^{-\mathbf{m}}$ ($\mathbf{s}$ – номер окружности). В нашем же примере полюсы и нули могут быть расположены при той же разрядности в узлах более частой сетки: расстояние между прямыми, параллельными оси ординат равно $\mathbf{2}^{-2\mathbf{m}}$, а квадраты радиусов окружности равны $\mathbf{r}_s^2 = \mathbf{s}2^{-3m}$. Сетка, в узлах которой расположены нули может быть еще более частой. Так для ЦФ с $\mathbf{inp} = 1$ и $\mathbf{out} = 7$ при той же разрядности коэффициентов дискреты изменения коэффициентов $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ соответственно равны 2^{-7m}, 2^{-6m} и 2^{-5m}

Таким образом, при одном и том же приращении коэффициентов, смещение полюсов в ЦФ, определенная выше структура коэффициентов которых состоит из чисел, больших единицы, происходит на сетке, значительно более частой, чем для канонической структуры, т. е. обладают более низкой чувствительностью.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Крошьер, Оппенгейм. Анализ линейных цифровых цепей. - ТИИЭР, 1975, т. 63, № 4, с. 45 - 60.

2. Лесников В. А., Наумович Т. В. Генерация структур цифровых фильтров// Труды 3 международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения». – М., 2000 – Т. 1. С. 135 – 138.

3. Лесников В.А., Наумович Т. В. Дискретизация z-плоскости при квантовании коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров высоких порядков. . – Вестник Вятского НЦ Верхне-Волжского отделения Академии технологических наук РФ. – Киров, 2000. – с. 38 – 41.

4. .Лесников В. А. Нумерация и декомпозиция структур цифровых фильтров// Труды 3 международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения». – М., 2000 – Т. 1. С. 140 – 143.

5. Лесников В. А. Дискретизация z-плоскости вследствие квантования коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров // Труды 3 международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения». – М., 2000 – Т. 1. С. 130 – 133.

THE NATURE OF EFFECT OF LOW SENSITIVITY OF A DIGITAL FILTER

Lesnikov V.

Vyatka State
36 Moscow str., Kirov 610000, Russia
Phone (+7-833-2) -693295, Fax (+7-833-2) -626578, E-mail: lesnlex@mail.ru

Abstract. Is rotined, that the effect of low sensitivity of digital filters is explained by structure of coefficients of a canonical form of a transfer function, which one represent sum of products of coefficients of the digital filter structure.

It is known, that the digital filter (DF) with a given transfer function can be realised through miscellaneous versions of structure. Among set of different implementations the especial place is taken by low sensitivity DF.

In the given report the explanation of the fact of difference of a demanded wordlength of DF with different structures is offered.

The canonical representation of a DF transfer function is

$$\mathbf{H}(\mathbf{z})=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{a}_i\mathbf{z}^i \Big/ \left(1-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{b}_i\mathbf{z}^i\right). \tag{1}$$

The set of coefficients $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ describes DF with any structure. But these coefficients are DF coefficients only for some structures (direct form, canonical form). At implementation of algorithm of a digital filtration the operations of multiplying on other factors are substantially executed. It is possible to present coefficients $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ as function of DF coefficients. It is easy to show, that the coefficients $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ are sum of products of DF coefficients. As expression for coefficients $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ includes products of DF coefficients, the wordlength of coefficients $\{\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\}$ is augmented.

Thus it is possible to show, that there are such structures of filters, which one at a small wordlength of the filter coefficients have a large wordlength of coefficients of a transfer function.

It also explains effect of low sensitivity of such filters.