ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА WAVELET ФИЛЬТРАЦИИ

Медведева Е.В., Татауров Р.В.

Вятский государственный университет
610000, г. Киров, ул. Московская, 36, E-mail: res@riac.ru

Реферат: исследован алгоритм подавления шума, построенный на основе wavelet преобразования и различных обнуляющих функциях.

Эволюция и развитие алгоритмов и средств цифровой обработки сигналов (ЦОС) поставили задачу применения новых методов для их обработки. Неотъемлемой чертой принимаемых сигналов является наличие белого гауссовского шума. Фильтрация случайных сигналов из шумов является классической в теории линейной и нелинейной фильтрации сигналов. Существуют и другие методы, направленные на ослабление действия шума. Так, в работах [1-4] предложены алгоритмы wavelet фильтрации, рассмотрены методы сокращения коэффициентов wavelet разложения сигнала и исследовано их влияние на степень подавления шума. Авторами проведен анализ чувствительности алгоритмов к изменениям сигнала и анализ смещения и дисперсии оценки сигнала после восстановления, рассмотрены вопросы выбора порога обнуления коэффициентов. В указанных работах отсутствует информация о влиянии параметров объема выборки входного сигнала на качество фильтрации и необходимых вычислительных ресурсах для практической реализации алгоритмов.

Работа посвящена вопросам распространения алгоритма Донохо и Джонсона [2] для фильтрации псевдослучайной последовательности из шума, анализу влияния объемы выборки сигнала на качество фильтрации и оценке вычислительной сложности алгоритма.

Представим исследуемый сигнал $x = \left(x_1, x_2, ..., x_L\right)$ в виде

$$x_i = f_i + \sigma\varepsilon_i \qquad i = 1,2,...,L \tag{1}$$

где f_i - детерминированный сигнал; ε_i - белый гауссовский шум; σ - дисперсия шума; L - длина сигнала. Необходимо найти оценку сигнала $\widetilde{f}$, которая бы минимизировала средний квадрат ошибки:

$$R(f, \widetilde{f}) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{n} E\left(\widetilde{f}_i - f_i\right)^2 . \tag{2}$$

В ряде работ [1,2] разработаны действенные алгоритмы для оценки сигнала $\widetilde{f}$, обладающие почти асимптотическими свойствами.

Пусть $x = \left(x_1, x_2, ..., x_L\right)$ - эмпирические wavelet коэффициенты, а. коэффициенты wavelet разложения вычисляются с помощью линейного преобразования $w = Wx$ где $W = \left|c_{nn}\right|$ – матрица wavelet преобразования, c_{nn} – коэффициенты wavelet разложения. В этом случае показавший высокую эффективность для подавления шума алгоритм Донохо и Джонстона формально может быть описан следующими шагами:

1. Вычислить коэффициенты wavelet разложения $w = Wx$.
2. Применить нелинейное обнуляющее правило (функцию) δ_{λ_k} (см. ниже) к коэффициентам разложения w_k:

$$\widetilde{w}_k = \widetilde{\sigma}\delta_{\lambda_k}\left(w_k / \widetilde{\sigma}\right), \tag{3}$$

где λ_k – порог обнуления коэффициентов, $\widetilde{\sigma}$ – оценка масштаба σ.

3. Использовать обратное wavelet преобразование $\widetilde{f}_\lambda = W^{-1}w$.

В работах [1,2] предложено использовать «мягкую» δ_λ^S, «жесткую» δ_λ^H и «полумягкую» δ_λ^{SS} обнуляющие функции:

$$\delta_{\lambda}^{S}(x)=\begin{cases}0 & \text{если } |x|\le\lambda_i\\ \mathbf{sign}(x)(|x|-\lambda_i) & \text{если } |x|>\lambda_i;\end{cases} \tag{4}$$

$$\delta_{\lambda}^{H}(x)=\begin{cases}0 & \text{если } |x|\le\lambda_i\\ x & \text{если } |x|>\lambda_i;\end{cases} \tag{5}$$

$$\delta_{\lambda}^{H}(x)=\begin{cases}0 & \text{если } |x|\le\lambda_1\\ \mathbf{sign}(x)\dfrac{\lambda_2(|x|-\lambda_1)}{\lambda_2-\lambda_1}\int & \text{если } \lambda_1<|x|\le\lambda_2\\ x & \text{если } |x|>\lambda_2\end{cases}. \tag{6}$$

Было установлено, что выбор обнуляющей функции и порога обнуления коэффициентов разложения существенно влияет на эффективность работы алгоритма фильтрации.

Работоспособность алгоритма была проверена на фильтрации из шума образцового сигнала, в качестве которого выбрана последовательность Хаффмена.

На рис. 1а изображен исходный сигнал длиной 2^{14} отсчетов, на рис.1б - рис.1г представлены результаты фильтрации соответственно алгоритмов «жесткого», «мягкого» и «полумягкого» обнуления коэффициентов. Можно заметить, что лучшими характеристиками обладают алгоритмы «мягкого» и «жёсткого» обнуления – восстановленный сигнал наиболее близок к оригиналу. Худшие характеристики показал алгоритм «жесткого» обнуления, так как в этом случае наблюдается наибольшая дисперсия шума.

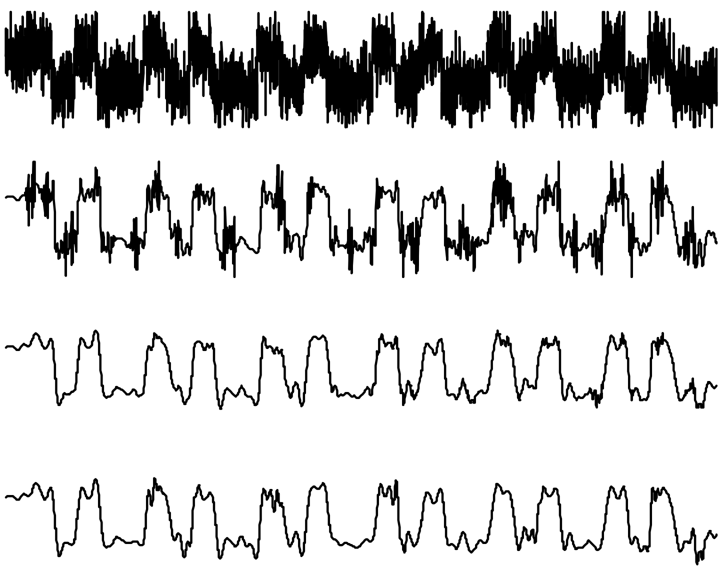

Рис.1.

Результаты количественных исследований зависимости входного $\rho_{вх}^{2}$ и выходного $\rho_{вых}^{2}$ отношений сигнал-шум при изменении объема выборки входного сигнала в диапазоне $2^{8}\dots2^{16}$ показаны на рис.2.

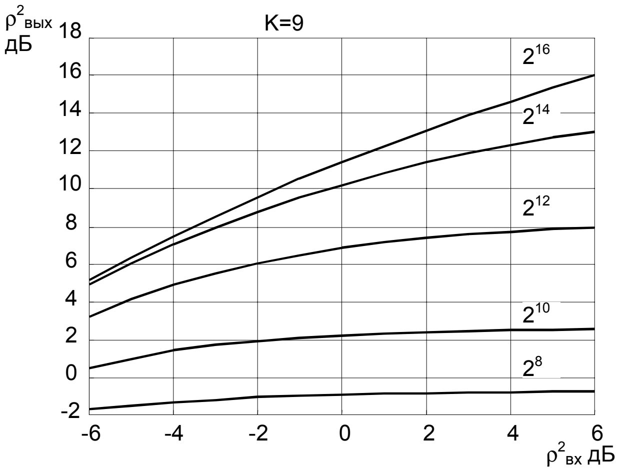

Рис.2.

При моделировании использовалось девятиуровневое ($K = 9$) wavelet разложение из семейства Добеши и «жесткое» обнуляющее правило (5). Отметим, что эффективность подавления шума в значительной степени зависит от числа отсчетов исходного сигнала.

Основные вычислительные затраты при работе данного алгоритма составляеют wavelet разложение и восстановление. Затраты на wavelet разложение зависят от числа уровней разложения, порядка wavelet и используемого семейства.

Wavelet преобразование использует $N = K\left(N_{дец} + 2N_{св}\right)$ операций, где K – число уровней разложения, $N_{дец}$ – число шагов децимаций, $2N_{св}$ – число операций свертки. Очевидно, что работа алгоритма требует значительных вычислительных ресурсов. В то же время высокая эффективность алгоритма при его реализации на универсальных цифровых сигнальных процессорах TMS320C6XXX и FPGA семейств Virtex (Xilinx) или Cyclone (Altera) делает возможным использовать аппаратно-программную реализацию этих алгоритмов в практических приложениях для подавления шума

Библиография

1. Andrew G Bruce, David L. Donoho, Hong-Ye Gao and Douglas Martin. Denoising and Robust NonLinear Wavelet Analysis. – Journal of the American Statistical Association, 1997.
2. David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Minimax estimation via wavelet shrinkage. Technical report 402, Stanford University, 1992.
3. Andrew G Bruce, Hong-Ye Gao. WaveShrink: Shrinkage functions and Thresholds. – StatSci Division, Research report N39, 1995.
4. D. L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. - IEEE Trans. Inform. Theory, pp. 613-627, vol. 41, no. 3, May 1995.

RESEARCH OF ALGORITHMS OF WAVELET DENOISING

Medvedeva E., Tataurov R.

Vyatka state university
610000, Kirov, Moskovskaya st., 36, E-mail: res@riac.ru

Evolution both development of algorithms and digital signal processing tools have put the task of application of new methods for they're processing. The filtering of random signals from noise is classical in the theory of linear and nonlinear filtering of signals. Nevertheless there are also other methods directed to suppress the noise, for example based on wavelet denoising [1,2]. In this papers there is no information on influence of parameters of digitization of an input signal to quality of filtering and necessary computing resources for practical implementation of algorithms.

This paper is devoted to problems of wavelet decomposition for denoising a pseudorandom sequence, analysis of influence of a estimation rule of wavelet coefficients and evaluation of computing complexity of this algorithm.

The following steps can circumscribe the Donoho and Jonstone algorithm:

1. Calculate wavelet transform.
2. To apply non-linear estimation the function to coefficients of decomposition.
3. Calculate inverse wavelet transform.

In papers [1,2] it is offered to use "soft", "hard" and "semi-soft" estimation rules.

The considered algorithm was checked for denoising of an etalon signal, as which the Haffman sequence for three variants of estimation function is selected. Is placed (installed), that the algorithms "soft" are more effective and "semi-soft" shrinkage - the restored signal is closest to the original. The worse characteristics are observed at "hard" estimation.

Results of quantitative researches of dependence of the input ρ_{in}^2 and output ρ_{out}^2 signal to noise ratio's from change of length of a source sequence has shown, that the efficiency of suppression of noise largely depends on a sample size of source signal. At simulation the decomposition from a Daubechi wavelet family and "hard" estimation rule 9 level decomposition was used.

The computing complexity of the given algorithm is determined by wave-let decomposition and restoring.

Wavelet transform used about $N = K(N_d + 2N_c)$ operations, where K – number of decomposition levels, N_d – number of step of decimation's, $2N_c$ – number of operations of convolutions. Obviously, algorithm required significant computational resources. At the same time simplicity and high efficiency of algorithm make it rather attractive for a wide range of DSP developers. The using of universal digital signal processors TMS320C6X and FPGA of Virtex family (Xilinx) or Cyclone family (Altera) makes possible to use implementation of these algorithms in practical applications even now.

Bibliography

1. Andrew G Bruce, David L. Donoho, Hong-Ye Gao and Douglas Martin. Denoising and Robust NonLinear Wavelet Analysis. – Journal of the American Statistical Association, 1997.
2. David L. Donoho and Iain M. Johnstone. Minimax estimation via wavelet shrinkage. Technical report 402, Stanford University, 1992.