

РАДИС Лтд
Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20
Тел./факс. (095) 535-02-70, 532-06-63, e-mail: alexmin@orc.ru

Реферат. Представлены результаты исследования алгоритмов минимизации длины слова коэффициентов каскадных цифровых БИХ-фильтров нижних частот. Алгоритмы основаны на вариации исходных параметров (однопараметрическая и трехпараметрическая) и простом округление коэффициентов. Хотя наименьшую длину слова дает трехпараметрический подход, его выигрыш в сравнении с более простой однопараметрической вариацией составляет 1-2 бита и лишь в 27% случаев.

1. Введение. Сложность и быстродействие аппаратных цифровых фильтров на основе отдельных умножителей, блоков умножения или распределенной арифметики, зависят от длины слова коэффициентов. Поэтому важно минимизировать длину слова. Для этого можно использовать алгоритмы на основе вариации исходных параметров (ВИП), преимущества которых в сравнении с алгоритмами вариации самих искомым коэффициентов обсуждались в [1-3]. В работах [1,2] представлен ряд примеров синтеза каскадных цифровых БИХ-ФНЧ с минимальной длиной слова коэффициентов, требования для которых были взяты из разных публикаций. В [1] рассмотрен однопараметрический, а в [2] более сложный для программирования трехпараметрический ВИП алгоритм. Цель данной статьи – на большом числе примеров синтеза ФНЧ выяснить, как сильно отличаются минимальные длины слова коэффициентов, полученные этими алгоритмами, и как они соотносятся с нижней границей [2] и длиной слова, полученной широко известным методом простого округления.

2. Допустимые решения. Поиск решения в используемых алгоритмах будем проводить до нахождения первого допустимого решения, т.е. когда неравномерность АЧХ фильтра в номинальной полосе пропускания ($0 - f_{1n}$) и ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания ($f_{2n} - 0.5$) удовлетворяют неравенствам

$$\Delta \tilde{a} \leq \Delta a_{\max} \text{ и } \tilde{a}_0 \geq a_{0\min}$$

или максимальная взвешенная ошибка аппроксимации АЧХ

$$\tilde{e} \leq 1,$$

где знак \sim означает соответствие параметра квантованным коэффициентам. Предполагается, что максимум АЧХ нормирован к 1, частота дискретизации равна 1, а оценки параметров выполняются по 500 частотам в каждой из упомянутых полос. Под квантованием с шагом 2^{-M} подразумевается округление. Здесь M длина слова дробной части двоичных коэффициентов, представленных с фиксированной точкой.

3. Нижняя граница длины слова коэффициентов. Нижнюю границу длины слова коэффициентов M_{LB} определим исходя из наличия специфических точек в области допустимых исходных параметров $S(\Delta a, f_1, f_2)$, для которой $e \leq 1$ [2].

4. Алгоритмы минимизации длины слова коэффициентов. Все обсуждаемые ниже алгоритмы основаны на многократном расчете каскадных БИХ-ФНЧ Золотарева-Кауэра с последующим квантованием их коэффициентов. Форма звеньев в каскадах – прямая. Масштабирование игнорируется.

4.1. Однопараметрический ВИП алгоритм. В однопараметрическом ВИП алгоритме (ВИП-1) параметры f_1 и f_2 фиксируются на значениях f_{1n} и f_{2n} , а параметр Δa изменяется в диапазоне $\Delta a_{\min} \leq \Delta a \leq \Delta a_{\max}$ при $M = 1, 2, 3$ и т.д., пока для некоторого значения Δa и $M = M_o$ не будет найдено решение с $\tilde{e} \leq 1$. Детали рассмотрены в [1].

4.2. Трехпараметрический ВИП алгоритм. В трехпараметрическом ВИП алгоритме (ВИП-3) в качестве начальных используем специфические точки (см. п.3) определяемые при $e \leq 1.3$. Это означает, что они могут находиться как внутри, так и вне $S()$. Очевидно, что этим точкам будет соответствовать значение $M'_{LB} \leq M_{LB}$. Определение начальных точек выполняется методом ветвей

и границ. В окрестности найденной точки поочередно варьируются параметры Δa , f_1 и f_2 . Поиск ведется на отрезке, ограниченном зоной постоянства доминирующих коэффициентов. Значение параметра, приводящего к меньшему значению \tilde{e} , фиксируется, далее изменяется второй, а затем третий параметр. Все продолжается до получения $\tilde{e} \leq 1$ для некоторого M_o или пока не будут исчерпаны начальные точки. В последнем случае все повторяется для $M = M_{LB}' + 1$. Детали описаны в [2].

4.3. Алгоритм простого округления. В алгоритме простого округления (ПО) расчет ФНЧ выполняется для номинальных значений f_{1n} и f_{2n} , а исходный параметр Δa определяется только один раз из условия получения минимума максимальной ошибки e . Это условие соответствует равенству уровней пульсаций в полосе пропускания и задерживания и приводит к решению алгебраического уравнения 4-й степени. Квантование коэффициентов выполняется для $M = 1, 2, 3$ и т.д., до получения $\tilde{e} \leq 1$ для некоторого M_o .

5. Генерирование тестов. Варианты требований к ФНЧ (тестов) получим с помощью датчика случайных чисел. Диапазоны и шаги изменения порядка N и параметров ФНЧ следующие:

$$4 \leq N \leq 12, \text{ шаг } -1;$$

$$0.05 \text{ дБ} \leq \Delta a_{\max} \leq 3 \text{ дБ}, \text{ шаг } - 0.05 \text{ дБ};$$

$$40 \text{ дБ} \leq a_{0\min} \leq 60 \text{ дБ}, \text{ шаг } - 5 \text{ дБ};$$

$$0.01 \leq f_{1n} \leq 0.4, \text{ шаг } - 0.01;$$

$$F(\Delta a_{\max}, a_{0\min}, f_{1n}, N) \leq f_{2n} \leq F(\Delta a_{\max}, a_{0\min}, f_{1n}, N-1),$$

где $F()$ - функция, связывающая N и параметры ФНЧ Золотарева-Кауэра [4]. В результате такого генерирования тестов получен ряд ФНЧ с $N=4$ (12 вариантов требований); с $N=5$ (6 вариантов); с $N=6, 7$ и 10 (по 9 вариантов); с $N=8$ (10 вариантов); с $N=9, 11$ и 12 (по 5 вариантов). Всего 70 вариантов.

6. Результаты тестирования. Ниже представлен анализ результатов синтеза ФНЧ для полученных тестов.

- Для всех 70 тестов наименьшая длина слова коэффициентов M_o достигнута с помощью алгоритма ВИП-3.
- В 73% тестов ВИП-1 и ВИП-3, а в 16% тестов ПО и ВИП-3 дают равные значения M_o .
- Применение ВИП-3 вместо ВИП-1 позволяет уменьшить M_o на 1 - 2 бита (только в 2 -х случаях на 2 бита).
- Относительно нижней границы и найденной минимальной длины имеем:
 $M_{LB} < M_o$ (максимум на 2 бита) для 34% тестов,
 $M_{LB} = M_o$ для 53% тестов,
 $M_{LB} > M_o$ (максимум на 2 бита) для 13% тестов.
- Уменьшение длины слова благодаря применению ВИП вместо ПО составляет 10-50%.
- Для 59% тестов решения в начальных точках, используемых в ВИП-3, оказываются допустимыми и вариация параметров не требуется.
- Для 12 ФНЧ (включая те, для которых $M_{LB} > M_o$) использование начальных точек вне области допуска ($1 < e \leq 1.3$) позволяет дополнительно уменьшить M_o на 1-2 бита.
- Полученные с помощью ВИП-3 минимальные значения длины слова находятся в диапазоне $2 \leq M_o \leq 14$.
- Для всех 70 ФНЧ использование начальных точек с ($1.3 < e \leq 1.5$) не приводит к дополнительному уменьшению M_o .

В таблице приведены некоторые из требований к ФНЧ и найденные для них значения M_{LB} и M_o . Здесь * означает, что решение с квантованными коэффициентами по крайней мере в одной начальной точке является допустимым, а + означает, что использовалась начальная точка вне

области $S()$. Данные из таблицы могут быть полезны для тестирования вновь разрабатываемых алгоритмов синтеза цифровых БИХ-фильтров.

7. Заключение. Исследовано два ВИП алгоритма применительно к задаче минимизации длины слова коэффициентов каскадных БИХ-ФНЧ. Использовано значительно большее число (70) примеров, чем представлено до сих пор в литературе. В 27% случаев трехпараметрический ВИП алгоритм дает меньшие на 1-2 бит значения длины слова, чем более простой в программировании однопараметрический алгоритм. Уменьшения на 2 бита очень редки. Нижняя граница длины слова отличается от найденной минимальной длины максимум на ± 2 бита. Для 59% тестов решения в начальных точках оказываются допустимыми, что подтверждает эффективность метода их определения. Использование начальных точек вне области допуска ($1 < e \leq 1.3$) в трехпараметрическом алгоритме может приводить к дополнительному уменьшению длины слова вплоть до 2-х бит. Уменьшение длины слова благодаря применению ВИП алгоритмов вместо простого округления составляет 10-50%.

Таблица

ФНЧ	N	Δa_{\max} , дБ	$a_{0\min}$, дБ	f_{1n}	f_{2n}	M_{LB}	M_o		
							ПО	ВИП-1	ВИП-3
1	4	0.05	45	0.01	0.029961	8	14	9	9
2	4	0.75	50	0.17	0.335192	2	6	3	3
3	5	0.10	60	0.25	0.395240	2	6	5	4+
4	6	1.05	60	0.23	0.282166	6	7	7	6*
5	7	2.20	40	0.22	0.225471	9	10	7	7+
6	8	2.10	40	0.17	0.173485	7	9	9	7*
7	9	1.85	55	0.19	0.198113	7	9	7	7*
8	10	0.50	60	0.02	0.021277	12	15	13	12+
9	11	0.30	50	0.27	0.273413	7	11	10	8
10	12	0.75	55	0.09	0.091150	10	12	10	10
11	12	1.85	50	0.30	0.300826	9	11	9	9*

Литература

1. Мингазин А.Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности. //Электросвязь. 1983. № 7. -С. 49-53.
2. Мингазин А.Т. Синтез рекурсивных цифровых фильтров при ограниченной разрядности коэффициентов. //Электросвязь. 1987. № 9. -С. 58-62.
3. Мингазин А.Т. Синтез и анализ цифровых фильтров с конечной длиной слова коэффициентов. //4-я международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. 2002. Т.1. -С. 85-90.
4. Мингазин А.Т. Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. //Электросвязь. 1999. № 1.-С. 22-23.

MINIMIZATION OF COEFFICIENT WORDLENGTH IN CASCADE IIR DIGITAL FILTERS

Mingazin A.

RADIS Ltd
 а/я 20, 124460, Moscow, Zelenograd, Russia,
 Tel/Fax (095)535-02-70, 532-06-63 e-mail: alexmin@orc.ru

Abstract. The investigation of coefficient wordlength minimization algorithms for cascade IIR digital low-pass filters is presented. The algorithms are based on a variation of initial parameters (one- and three-parametrical variation) and simple rounding of coefficients. Although the three-parametrical approach gives the minimal coefficient wordlength its advantage in comparison to more simple one-parametrical variation is 1-2 bit and only in 27 % of cases.

1.Using algorithms. The complexity and speed of hardware digital filters based on individual multipliers, multiplier blocks or distributed arithmetic depend on the coefficient wordlength. Therefore it is important to minimize the wordlength. For this two algorithms based on a variation of initial parameters (VIP) [1-3] can be used. Their efficiency is confirmed on a number of examples from different publications. The one-parametrical (VIP-1) and more difficult in programming three-parametrical algorithm (VIP-3) were considered in [1] and [2], respectively. The aim of the given work is to find out for cascade IIR low-pass digital filters what differences in minimal values of coefficient wordlength M_o can be obtained by using above algorithms and how they correspond to the low bound M_{LB} [2] and wordlength obtained by the widely known simple rounding method (SR).

All our algorithms are based on the repeated computation of Zolotarev-Cauer IIR low-pass digital filters with the subsequent quantization of their coefficients. The structure of second order sections in cascades is a direct form. A scaling is ignored. A search of a solution is carried until the first allowable solution will not be found, i.e. when the ripple $\Delta\tilde{a} \leq \Delta a_{\max}$ in the nominal passband ($0 - f_{1n}$) and the attenuation $\tilde{a}_0 \geq a_{0\min}$ in the nominal stopband ($f_{2n} - 0.5$). Here the sign \sim means conformity of a parameter to the quantized coefficients. The quantization with step 2^{-M} means the rounding. Here M is the fractional part wordlength of fixed-point coefficients.

2.Test generating. We use 70 variants of the tests obtained by a random-number generator. The ranges and steps of the change for the order N and parameters of digital filters are:

$$4 \leq N \leq 12, \text{ the step } -1; 0.05\text{dB} \leq \Delta a_{\max} \leq 3\text{dB}, \text{ the step } -0.05\text{dB};$$

$$40\text{dB} \leq a_{0\min} \leq 60\text{dB}, \text{ the step } -5\text{dB}; 0.01 \leq f_{1n} \leq 0.4, \text{ the step } -0.01;$$

$$F(\Delta a_{\max}, a_{0\min}, f_{1n}, N) \leq f_{2n} \leq F(\Delta a_{\max}, a_{0\min}, f_{1n}, N-1)$$

where $F()$ is the function of N and parameters of Zolotarev-Cauer low-pass digital filters [4].

3.Results of testing. For all 70 tests the minimal coefficient wordlength M_o is achieved by VIP-3 algorithm. In 73 % of tests VIP-1 and VIP-3, and in 16 % of tests SR and VIP-3 give equal values M_o . The application VIP-3 instead of VIP-1 allows to reduce M_o on 1-2 bit. For 59 % of tests the solutions in starting points in VIP-3 are allowable and the variation of parameters is not required. In relation to the low bound we have: $M_{LB} < M_o$ for 34 % of tests, $M_{LB} = M_o$ for 53 % of tests, $M_{LB} > M_o$ for 13 % of tests. The reduction of coefficient wordlength due to application of VIP instead of SR is 10-50 %.

References

1. Mingazin A.T. Digital filter design with finite wordlength coefficients. // *Elektrosvyaz*. 1983. № 7. -P. 49-53.
2. Mingazin A.T. Synthesis of recursive digital filters with limited coefficient wordlength. // *Telecommunications and Radio Engineering*. 1987. V. 41/42. № 11. -P. 26-32.
3. Mingazin A. Synthesis and analysis of digital filters with finite coefficient wordlength. // *DSPA*. 2002. V1. -P. 85-90.
4. Mingazin A.T. Extremal parameters of analog and digital filters. // *Elektrosvyaz*. 1999. № 1.-P. 22-23.