АДАПТИВНОЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИГНАЛОВ

Бочкарев В.В., Петрова И.Р., Теплов В.Ю.

Казанский государственный университет

Как известно, классические методы спектрального анализа позволяют достичь разрешения по частоте, равного обратному времени наблюдения. Большинство практически интересных сигналов нестационарны, что часто не позволяет выбрать время наблюдения, достаточно большое для достижения нужного уровня спектрального разрешения. Параметрические методы спектрального анализа за счет привлечения некоторых модельных предположений о сигнале позволяют существенно увеличить разрешающую способность при той же длине анализируемого ряда [1]. Это делает параметрические методы эффективным инструментом анализа нестационарных сигналов, в случае, когда параметры сигнала изменяются достаточно плавно. Если же параметры сигнала заметно меняются на интервале, используемом для оценивания, то, как легко убедится, широко употребляемые параметрические методы (Прони, MUSIC и др.) дают оценки с большими погрешностями. В данной работе рассматривается подход, позволяющий адаптировать ряд известных параметрических методов к анализу сигналов с быстро изменяющимися параметрами.

Мы будем использовать для получения спектральной оценки дискретную модель линейного предсказания [1]:

$$x_{k+r} - a_1 \; x_{k+r-1} - \ldots - a_r \; x_k = e_k \qquad (1)$$

или, в матричной форме,

$$X \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{a} \end{pmatrix} = \bar{e}\,, \qquad (1')$$

где e- вектор ошибок линейного предсказания, $a = (a_1, a_2, \ldots a_r)$, а X – матрица данных

$$X = \begin{pmatrix} x_r & x_{r-1} & \cdots & x_0 \\ x_{r+1} & x_r & \cdots & x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_{n-r} \end{pmatrix}$$

Из соотношения (1’) можно непосредственно оценить коэффициенты линейного предсказания. В этом случае, используя метод наименьших квадратов, получаем нормальные уравнения Юла-Уолкера

$$X^{+}X \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \bar{0} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

где r - дисперсия ошибки линейного предсказания. Такая оценка используется в авторегрессионном методе и методе Прони. Другой подход состоит в анализе собственных чисел и собственных векторов матрицы системы (2) $R=X^{+}X$, (каковая представляет собой оценку корреляционной матрицы сигнала) и оценивании частот составляющих в подпространстве шума (как делается, например, в методе MUSIC).

Допустим, что сигнал представляет собой набор узкополосных составляющих на фоне стационарного шума. Если допущены ошибки в оценке коэффициентов линейного предсказания, то в спектр ряда ошибок линейного предсказания будет содержать составляющие на частотах, соответствующих истинным и обнаруженным компонентам сигнала. В случае правильной оценки коэффициентов спектр ошибок линейного предсказания не должен содержать сосредоточенных составляющих. Шум в виде коротких импульсов будет вызывать аномально большие ошибки линейного предсказания на интервале в r+1 отсчетов. В обоих случаях непосредственное применение метода наименьших квадратов не даст оптимальной оценки.

Особенности распределения ошибок предсказания по времени и частотам удобнее всего проанализировать с помощью вейвлет- преобразования [2]. В работе [3] рассматривалось применение непрерывного вейвлет- преобразования к задаче параметрического спектрального оценивания. Здесь мы рассмотрим возможности применения дискретного вейвлет- преобразования для идентификации модели вида (1), и получения параметрической оценки спектральных параметров сигнала.

Пусть ***W*** – матрица вейвлет- преобразования. Найдем образ ряда ошибок линейного предсказания

©электронная версия подготовлена ЗАО АВТЭКС Санкт-Петербург, http://www.autex.spb.ru

$$y = We = WX\begin{pmatrix}1\\-a\end{pmatrix}$$

Рассмотрим самый простой случай, когда помеха представляет собой нормальный белый шум. При этом энергия ряда ошибок равномерно распределится по времени и частотам, т.е., y_i нормальны и имеют одинаковую дисперсию. В этом случае коэффициенты модели эффективно определяются методом наименьших квадратов. Вводя для общности диагональную весовую матрицу η: $\eta_{i,j} = \upsilon_i \delta_{i,j}$, получим аналог уравнений Юла-Уолкера:

$$X^+W^+\eta WX\begin{pmatrix}1\\-a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix} \tag{4}$$

Матрица данной системы

$$R = X^+W^+\eta\, WX \tag{5}$$

представляет собой оценку корреляционной матрицы сигнала в приближении квазистационарного процесса. Мы можем либо оценивать параметры a_i непосредственно по (4), получив аналоги авторегрессионного метода, метода Прони и т.п., либо, анализируя собственные числа и вектора матрицы (5), получить аналоги таких методов, как MUSIC и т.п. В случае, когда η - единичная матрица, в силу унитарности матрицы ***W***, выражения (4,5) сводятся к предыдущему случаю, следовательно, получаемая оценка будет, по крайней мере, не хуже, чем по известным алгоритмам.

Если же у нас есть определенная априорная информация о частотно-временном распределении полезного сигнала и/или шума, статистические характеристики оценок могут быть существенно улучшены. Адаптация алгоритма к помехе и типу сигнала может быть построена по трем направлениям: 1) выбор наиболее подходящего вейвлета, 2) построение оптимального дерева разложения и 3) подбор весовой функции в выражениях (4,5). Мы подбираем веса для вейвлет-коэффициентов так, чтобы их вклады в дисперсию итоговой оценки были одинаковыми.

Так же возможно построение итерационных алгоритмов оценивания. В этом случае строим первоначальную оценку с некоторым η_0, затем, проанализировав вейвлет- коэффициенты сигнала и ошибок линейного предсказания, делаем заключения о частотно-временном распределении шума и соответственно видоизменяем весовую матрицу η_1 для получения более точной оценки. В случае необходимости процедура может повторяться. Такой подход эффективен, например, в случае импульсного шума. При первой итерации решается задача порогового обнаружения и локализации шумовых импульсов, после чего в η_1 понижаются веса вейвлет- коэффициентов, содержащих вклады от этих импульсов.

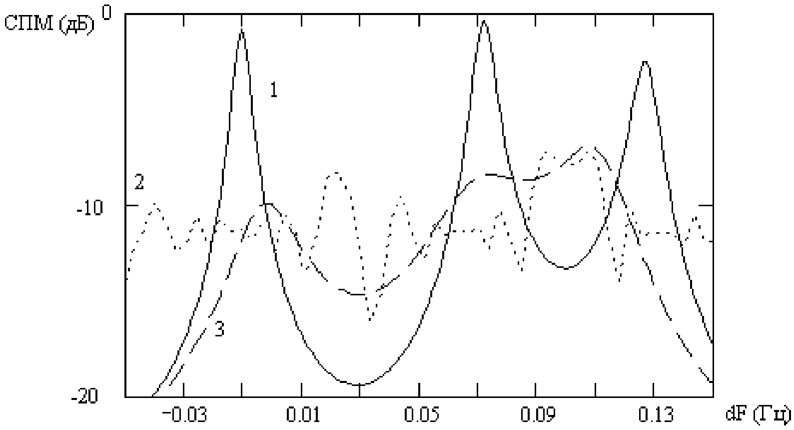
Другим важным достоинством алгоритмов, основанных на соотношениях (4,5), является возможность использовать более общую, чем (1), модель сигнала:

$$x_{k+r} - a_1(t_k)\; x_{k+r-1} - \ldots - a_r(t_k)\; x_k = e_k$$

О характере зависимости коэффициентов модели от времени мы должны сделать предположение, что времена, на которых коэффициенты существенно изменяются, больше характерных времен шумовой составляющей. Величины $a_i(t_m)$ получаем как решение системы (4) с весовой функцией $\eta^{(m)}$, которая подбирается так, чтобы обеспечить локализацию вблизи t_k.

Для примера, на рисунке приведены результаты обработки модельного нестационарного сигнала. Сигнал представляет собой три компоненты с линейной частотной модуляцией центральные частоты компонент составляют –0.01, 0.07, 0.13 соответственно, скорость дрейфа частоты подобрана так, чтобы за время наблюдения сдвиг частот составил одну треть от разности частот компонент. Помеха представляет собой белый шум с уровнем –20 дБ. Штриховая линия 3 соответствует оценке спектральной плотности мощности по методу MUSIC, полученной с помощью функций, реализованных в системе MATLAB. Сплошная линия 1 соответствует оценке, получаемой по методу MUSIC с использованием оценки корреляционной матрицы в форме (Д), при выборе весовой функции в октавах в виде стандартного гауссового окна. Для сравнения, пунктирная кривая 2 показывает классическую оценку спектральной плотности мощности.

Таким образом видно, что привлечение модифицированного метода MUSIC с использованием аппарата вейвлет преобразования позволяет успешно проводить оценку спектральных параметров нестационарных сигналов по коротким временным рядам.



Литература

1. С.Л. Марпл-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990, 584 с.
2. И. Добеши Десять лекций по вейвлетам. Москва, Ижевск, РХД, 2001, 464 с.
3. Бочкарев В.В., Кацевман М.М., Петрова И.Р., Теплов В.Ю. Использование непрерывного всплеск-преобразования для параметрической спектральной обработки нестационарных сигналов //3-я Международная конференция Цифровая обработка сигналов и ее применение. Доклады-1, Москва, 2000, с. 172-175.

¤

ADAPTIVE PARAMETRICAL SPECTRAL ESTIMATION OF NON-STATIONARY SIGNALS

Bochkarev V., Petrova I., Teplov V.

The Kazan state university

Parametrical methods of the spectral analysis allow to increase resolution essentially. If a signal is non-stationary on an interval observation, widely used parametrical methods (Prony, MUSIC, etc.) give an estimation with the big errors. In this paper we consider the approach, allowing to adapt some known parametrical methods for the analysis of signals with quickly changing parameters. We use discrete model of a linear prediction [1] in the matrix form for reception of a spectral estimation :

$$X \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{a} \end{bmatrix} = \bar{e}, \text{ where } X = \begin{bmatrix} x_r & x_{r-1} & \cdots & x_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_{n-r} \end{bmatrix} \text{ – a matrix table} \quad (1)$$

$\bar{e}$- error vector of of a linear prediction, $a = (a_1, a_2, \ldots a_r)$.

Features of distribution of errors of a prediction on time and frequencies are the most convenient for analysing with the help wavelet-transform. Let ***W*** - a matrix wavelet-transform. We shall find an image of some errors of a linear prediction

$$y = We = WX \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{a} \end{bmatrix}$$

By means of the least-squares method we shall receive analogue of the Yule-Walker's equations:

$$X^{+}W^{+}hWX \begin{bmatrix} 1 \\ -\bar{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ \bar{0} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Where r - a dispersion of a error of a linear prediction, and h: $h_{i,j} = u_i d_{ij}$ - diagonal weight matrix. A matrix of the this system

$$R = X^{+}W^{+}h\,WX \quad (3)$$

represents an estimation of a correlation matrix of a signal in quasistationary approximation. We can either estimate parameters a_i directly on (2), having received analogues autoregressive method, Prony method , etc., or, analyzing eigenvalues and eigenvectors of a matrix (3) to find analogues of such methods, as MUSIC, etc. In a case when h- an identity matrix, because of unitarity of matrix ***W***, expressions (2,3) are reduced to case described in [1]

If we have certain apriory information on time-and-frequency distribution of a useful signal and/or noise, statistical characteristics of estimations can be essentially improved. Adaptation of algorithm to a handicap and type of a signal can be constructed on three directions: 1) selection of the most suitable wavelet, 2) construction of an optimum tree of decomposition and 3) selection of weight function h.

Other important advantage of the algorithms based on expression (2,3), is opportunity to use more the general, than (1), model of a signal is:

$$x_{k+r} - a_1(t_k)\; x_{k+r-1} - \ldots - a_r(t_k)\; x_k = e_k$$

Coefficients $a_i(t)$ should be smoothly changing functions. Values $a_i(t_m)$ is solution of system (2) with weight function $h^{m)}$, which is selected so that to provide localization nearby t_k. .

The literature

1. S.L.Marple, Jr. Digital spectral analysis with applications. Prentice-Hall, Inc,. Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.