НААРО-ПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ СИГНАЛОВ

Выхованец В.С.

Институт проблем управления РАН им. В.А. Трапезникова
Москва, ул. Профсоюзная, 65, vyk@tirastel.md

Рассматривается проблема построения базисов с однородной и регулярной аналитической конструкцией спектральных функций. Приводится синтез аналитической конструкции, частным случаем которой являются нааро-подобные и усеченные системы сигналов.

Введение

Дискретные ортогональные преобразования широко используются в цифровой обработке сигналов и задаются следующими матричными выражениями,

$$\begin{cases} F = D \times A; \\ A = Q \times F, \end{cases} \qquad D \times Q = E_m,$$

где F (A) - выборка (спектр) сигнала, вектор-столбец длины m; D(Q) - матрица прямого (обратного) преобразования размерности $m \times m$; E_m - единичная матрица той же размерности. Матрицы преобразования D и Q состоят из характеристических векторов (столбцов) спектральных функций $\theta_i(j)$ и $\vartheta_j(i)$ соответственно, которые образуют базис ортогонального преобразования.

В работе [1] показано существование пяти алгебр образующих операций, которые могут быть использованы в цифровой обработке сигнала: алгебры логики, мультипликативной и аддитивной алгебры, конечного поля и кольца целых чисел. Алгебра логики и мультипликативная алгебра позволяют реализовать узкий класс базисов, которые условно назовем пиковыми, так как каждая из спектральных функций отлична от нуля только в одной точке (на одном интервале). Аддитивная алгебра [2], конечное поле и кольцо целых чисел порождают широкий класс базисов, значительно превосходящий и включающий класс пиковых базисов.

Известно, что для каждой процедуры обработки сигнала существует свой (оптимальный) базис, где поставленная задача имеет наиболее простое решение. Для этого в выбранной алгебре образующих операций ставится задача синтеза базиса, отвечающего заданным требованиям. Но на практике распространение получил небольшой класс спектральных преобразований – Фурье, Хартли, Адамара, Уолша, Хаара, и т.д., что объясняется простотой формирования спектральных функций и их наглядностью. Поставим задачу расширения спектра базисов, имеющих однородную и регулярную аналитическую конструкцию.

Синтез аналитической конструкции

Рассмотрим произвольное множество элементов $N_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и некоторую алгебру образующих операций $R = \langle N_k, +, \times \rangle$ с нулем σ и единицей τ. Пусть задана дискретная функция f от n переменных $x_0^{[n]} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ со значностями k_0, k_1, …, k_{n-1} соответственно. Разложим эту функцию по $s+1$ переменным $x_t^{[s+1]} = (x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+s})$ по системе функций $\phi_i^{(t)}$:

$$f(x_0^{[n]}) = \sum_{i=0}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times a_i^{(t)}(x_0^{[t]}),$$

где t – начальный индекс переменной в разложении, здесь он равен $n-s-1$. Положим для всех $y, z \in N_{k_{t+s}}$

$$\phi_i^{(t)}(x_t^{[s]}, y) = \phi_i^{(t)}(x_t^{[s]}, z) \quad (i = \overline{0, k_t^{[s]}-1})$$

где $k_t^{[s]} = k_t k_{t+1} \ldots k_{t+s-1}$, то есть первые $k_t^{[s]}$ из $k_t^{[s+1]}$ спектральных функций $\phi_i^{(t)}$ не зависят от переменной x_{t+s}. В соответствии с теоремами разложения [1], это возможно во всех алгебрах образующих операций, кроме алгебры логики и мультипликативной алгебры. Тогда

$$f(x_0^{[n]}) = f^{(t)}(x_0^{[t+s]}) + \sum_{i=k_t^{[s]}}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times a_i^{(t)}(x_0^{[t]}),$$

где $f^{(t)}$ – некоторая функция от $t+s$ переменных. В свою очередь, раскладывая $f^{(t)}$ по последним $s+1$ переменным, получим

$$f(x_0^{[n]}) = \sum_{i=0}^{k_0^{[s]}-1} \phi_i(x_0^{[s-1]}) \times a_i + \sum_{t=0}^{n-s-1} \sum_{i=k_t^{[s]}}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times a_i^{(t)}(x_0^{[t]}),$$

Так как коэффициенты $a_i^{(t)}$ – функции, зависящие от t переменных, представим каждый из них в виде разложения по своей системе ортогональных функций $\psi_{ij}^{(t)}$,

$$f(x_0^{[n]}) = \sum_{i=0}^{k_0^{[s]}-1} \phi_i(x_0^{[s-1]}) \times a_i + \sum_{t=0}^{n-s-1} \sum_{i=k_t^{[s]}}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times \left\{ \sum_{j=0}^{k_0^{[t]}-1} \psi_{ij}^{(t)}(x_0^{[t]}) \times a_{ij}^{(t)} \right\},$$

где для определенности положим $k_t^{[0]} = 1$ и $\psi_{ij}^{(0)} = \tau$. Тогда матрица прямого преобразования $D = D_{n-s}$ может быть получена по рекуррентному выражению

$$D_{t+1} = \left(E_{k_0^{[t]}} \otimes \Phi^{(t)} \right) \times \begin{bmatrix} D_t & \varnothing & \cdots & \varnothing \\ \varnothing & \Psi_1^{(t)} & \cdots & \varnothing \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \cdots & \Psi_{k_t-1}^{(t)} \end{bmatrix} \quad (t = \overline{0, n-s-1}),$$

а матрица обратного преобразования $Q = Q_{n-s}$ – по рекуррентному выражению

$$Q_{t+1} = \begin{bmatrix} Q_t & \varnothing & \cdots & \varnothing \\ \varnothing & \mu\Psi_1^{(t)} & \cdots & \varnothing \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \cdots & \mu\Psi_{k_t-1}^{(t)} \end{bmatrix} \times \left(E_{k_0^{[t]}} \otimes \mu\Phi^{(t)} \right) \quad (t = \overline{0, n-s-1}),$$

при начальных условиях $D_0 = \Phi$, $Q_0 = \mu\Phi$ и $\Psi_i^{(0)} = E_{k_0^{[s]}}$, где $\varnothing$ – квадратная матрица из нулей алгебры образующих операций R размерности $k_0^{[t]}$, а E_k – единичная матрица размерности $k \times k$, знак μ – знак унарной матричной операции обращения, $\otimes$ – операция кронекеровского произведения матриц,

$$\Phi = [\phi_i(j)] \quad (i, j = \overline{0, k_0^{[s]} - 1}),$$

$$\Phi^{(t)} = \left[\phi_i^{(t)}(j)\right] \quad (i, j = \overline{0, k_t^{[s+1]} - 1}),$$

$$\Psi_i^{(t)} = \left[\psi_{ij}^{(t)}(l)\right] \quad (i = \overline{0, k_t - 1},\ j, l = \overline{0, k_0^{[t]} - 1}).$$

Заключение

Синтезированная аналитическая конструкция описывает множество базисов спектрального преобразования и характеризуется некоторым параметром s – глубиной или масштабом спектрального разложения. При $s = 0$ получаем всевозможные нааро-подобные и усеченные базисы [3]. При этом на системы функций $\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}^{(t)}$ и $\mathbf{\Psi}_i^{(t)}$ накладывается единственное требование – в используемой алгебре образующих операций эти функции представляются невырожденными матрицами дискретного преобразования. Произвольный выбор ядра преобразования $\mathbf{\Phi}$, функций $\mathbf{\Phi}^{(t)}$ и $\mathbf{\Psi}_i^{(t)}$ позволяет синтезировать большое многообразие базисов при достаточно однородной и регулярной общей аналитической конструкции.

Список литературы

1. Vykhovanets V.S. Algebraic Systems for Digital Signal Processing // Proceedings of Sixth International Conference "Pattern Recognition and Information Processing" (PRIP'2001), Mink, 2001, Vol. 2, PP. 93-99.

2. Выхованец В.С. Аддитивная алгебра в цифровой обработке сигналов. // Доклады 4-й Международной конференции и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (DSPA'2002)– М., 2002. – Т. 2. – С. 255-258.

3. Кухарев Г.А., Шмерко В.П. Новые возможности дискретного преобразования Фурье для аналитического описания двоичных и многозначных данных // Распознавание, классификация и прогноз. Математические методы и их применение. – М.: Наука, 1991. – Том 3. – С. 112-147.

HAAR-LIKE SYSTEMS OF SIGNALS

Vykhovanets V.

Institute of Control Science RAS
Moscow, Profsoyuznaya str., 65, vyk@tirastel.md

Abstract. A problem of generation of bases having regular and homogeneous analytical construction of spectral functions is considered. Synthesis of analytical construction, where Haar-like and truncated systems of signals is a particular case, is discussed.

Let us expand the function f depended on variables $x_0^{[n]} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ with k_0, k_1, …, k_{n-1} digits correspondingly in a system of spectral functions $\phi_i^{(t)}$ by the last $s+1$ variables $x_t^{[s+1]} = (x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+s})$,

$$f(x_0^{[n]}) = \sum_{i=0}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times a_i^{(t)}(x_0^{[t]}),$$

where t is an index of first variable, here $t = n-s-1$. For all $y,z \in N_{k_{t+s}}$ let $\phi_i^{(t)}(x_t^{[s]}, y) = \phi_i^{(t)}(x_t^{[s]}, z)$ $(i = \overline{0, k_t^{[s]}-1})$, where $k_t^{[s]} = k_t k_{t+1} \ldots k_{t+s-1}$, i.e., the first $k_t^{[s]}$ out of $k_t^{[s+1]}$ spectral functions $\phi_i^{(t)}$ do not depend on the variable x_{t+s}. This is possible in all algebras, except in the multiplicative algebra and the algebra of logic [1, 2]. Then we can write

$$f(x_0^{[n]}) = f^{(t)}(x_0^{[t+s]}) + \sum_{i=k_t^{[s]}}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times a_i^{(t)}(x_0^{[t]}),$$

where $f^{(t)}$ is a function of $t+s$ variables. In turn, expanding $f^{(t)}$ by the last $s+1$ variables, we obtain

$$f(x_0^{[n]}) = \sum_{i=0}^{k_0^{[s]}-1} \phi_i(x_0^{[s-1]}) \times a_i + \sum_{t=0}^{n-s-1} \sum_{i=k_t^{[s]}}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times a_i^{(t)}(x_0^{[t]}),$$

Since the coefficients $a_i^{(t)}$ are functions, we represent them as expansions in systems of orthogonal functions $\psi_{ij}^{(t)}$

$$f(x_0^{[n]}) = \sum_{i=0}^{k_0^{[s]}-1} \phi_i(x_0^{[s-1]}) \times a_i + \sum_{t=0}^{n-s-1} \sum_{i=k_t^{[s]}}^{k_t^{[s+1]}-1} \phi_i^{(t)}(x_t^{[s+1]}) \times \left\{ \sum_{j=0}^{k_0^{[t]}-1} \psi_{ij}^{(t)}(x_0^{[t]}) \times a_{ij}^{(t)} \right\},$$

where for the sake of definiteness we take $k_t^{[0]} = 1$ and $\psi_{ij}^{(0)} = 1$. We determine the transformation matrices $D = D_{n-s}$ and $Q = Q_{n-s}$ from the recurrent equations ($t = \overline{0, n-s-1}$),

$$D_{t+1} = \left(E_{k_0^{[t]}} \otimes \Phi^{(t)} \right) \times \begin{bmatrix} D_t & \varnothing & \cdots & \varnothing \\ \varnothing & \Psi_1^{(t)} & \cdots & \varnothing \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \cdots & \Psi_{k_t-1}^{(t)} \end{bmatrix},$$

$$Q_{t+1} = \begin{bmatrix} Q_t & \varnothing & \cdots & \varnothing \\ \varnothing & \mu\Psi_1^{(t)} & \cdots & \varnothing \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varnothing & \varnothing & \cdots & \mu\Psi_{k_t-1}^{(t)} \end{bmatrix} \times \left(E_{k_0^{[t]}} \otimes \mu\Phi^{(t)} \right),$$

under the initial conditions $\boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{Q}_0 = \boldsymbol{\mu\Phi}$ and $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{i}}^{(0)} = \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}_0^{[s]}}$, where $\varnothing$ is a square matrix of size $\boldsymbol{k}_0^{[\boldsymbol{t}]}$, $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}}$ is unity matrix of size $\boldsymbol{k}$, μ denotes an inversion of matrix, $\otimes$ denotes Kronecker product of matrices, $\Phi = [\phi_i(j)]$ $(i, j = \overline{0, k_0^{[s]} - 1})$, $\Phi^{(t)} = \left|\phi_i^{(t)}(j)\right|$ $(i, j = \overline{0, k_t^{[s+1]} - 1})$, $\Psi_i^{(t)} = \left|\psi_{ij}^{(t)}(l)\right|$ $(\boldsymbol{i} = \overline{0, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{t}} - 1}$, $j, l = \overline{0, k_0^{[t]} - 1})$.

So, we obtain the analytical constriction that describes many spectral bases. The construction depends on scale or depth of transformation $\boldsymbol{s}$. When $\boldsymbol{s} = 0$ we have Haar-like or truncated spectral functions [3]. Arbitrary choice of kernel of transformation $\boldsymbol{\Phi}$, systems of function $\boldsymbol{\Phi}^{(\boldsymbol{t})}$ and $\boldsymbol{\Psi}_{\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{t})}$ allow us to get many systems of signals, which have regular and homogeneous analytical construction.

REFERENCES

1. Vykhovanets, V.S., Algebraic Systems for Digital Signal Processing, *Proceedings of Sixth International Conference “Pattern Recognition and Information Processing”*. Minsk, 2001. Vol. 2. PP. 93-99.
2. Vykhovanets, V.S., Additive Algebra for Digital Signal Processing, *Proceedings of 4th International Conference and Exhibition on Digital Signal Processing and its Applications,* Moscow, 2002, vol. 2, pp. 258-260.
3. Kukharev, G.A.and Shmerko, V.P. New Potentialities of Discrete Fourier Transformation for Analytical Description of Binary and Multivalued Data, in *Recognition of classification and Prediction: Mathematical Methods and Their Application*, Moscow: Nauka, vol. 3, pp. 112-147 (in Russian).