АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КОДОВ ГРЕЯ

Середа С.Н.

Муромский институт
Владимирский государственный университет
602200, Муром, ул. Орловская, 23, кафедра ИС
e-mail: sereda@mivlgu.murom.ru

ВВЕДЕНИЕ

В задачах цифровой обработки сигналов часто используют представление сигнала в виде оптимальных кодов, сохраняющих разности, с целью эффективного кодирования или коррекции ошибок, возникающих в каналах передачи. К одним из таких кодов относится класс кодов Грея [1]. Также код Грея используется как один из шагов в различных алгоритмах, например, в методе JBIG или методе контекстно-взвешенного дерева сжатия полутоновых изображений [2].

Известно, что N – разрядный код Грея есть упорядоченная циклическая последовательность 2^N N- разрядных кодовых слов различающихся в одном разряде. Существует много N – разрядных кодов Грея, интерес представляет исследование алгоритмов построения двоично – инверсных кодов Грея и их свойств [2,3].

1. АЛГОРИТМЫ КОДОВ ГРЕЯ

Известно несколько алгоритмов построения кодов Грея [2,3]. Традиционно используют нерекурсивный алгоритм, основанный на операции суммы по модулю два $\oplus$ исходного двоичного кода N –разрядного числа и его копии сдвинутой на один разряд вправо.

$$G = BIN \oplus (BIN \Rightarrow 1), \tag{1}$$

где $\Rightarrow 1$ – операция сдвига вправо на один разряд.

Обратный код Грея IG формируется побитно слева направо с проверкой четности суммарного числа единиц в старших разрядах, согласно условию для каждого разряда кодового слова

$$g_j = \begin{cases} g_j, & \text{если число единичных разрядов четно} \\ \overline{g_j} & \text{если число единичных разрядов нечетно} \end{cases}. \tag{2}$$

Рекурсивное построение прямого кода Грея G учитывает битовую структуру и заключается в зеркальном отражении и удвоении исходной последовательности из M – чисел на первом шаге, и добавлении еще одного старшего разряда (0 – к исходным M числам, 1 – к зеркально отраженным числам от M+1 до 2M) к полученной 2M последовательности.

$$G_{2M} = \begin{cases} O_M\, G_M \\ I_M\, \overline{G}_M \end{cases}, \tag{3}$$

где O_M, I_M – нулевой и единичный векторы порядка M, дополняющие старшие разряды кода Грея последовательности из M кодовых слов;

$\overline{G}_M$ - зеркально – отраженная последовательность M кодовых слов.

Прямой и обратный коды Грея - взаимно обратные преобразования. Тогда последовательная перестановка двоичного кода BIN по прямому и обратному коду Грея восстанавливает исходный двоичный код.

$$BIN \rightarrow G \rightarrow IG \rightarrow BIN,\ BIN \rightarrow IG \rightarrow G \rightarrow BIN, \tag{4}$$

2. ДВОИЧНО – ИНВЕРСНЫЕ КОДЫ ГРЕЯ

Прямой (обратный) двоично – инверсный код Грея RG (IRG) получается применением операции двоично - инверсной перестановки (DIP) прямого (обратного) кода Грея.

$$G \leftrightarrow (DIP) \leftrightarrow RG,\ IG \leftrightarrow (DIP) \leftrightarrow IRG, \tag{5}$$

Тогда можно выразить рекурсивную формулу получения прямого двоично – инверсного кода Грея RG.

$$RG_{2M} = \begin{cases} RG_M\, O_M \\ \overline{RG}_M\, I_M \end{cases} \tag{6}$$

Не рекурсивный алгоритм идентичен (1) с учетом двоичной инверсии результата (5).

Обратный двоично – инверсный код Грея IRG формируется побитно как в (2), но справа налево с проверкой четности суммарного числа единиц в младших разрядах и двоичной инверсии разрядов. Рекурсивный алгоритм обратного двоично – инверсного кода Грея выражается формулой

$$RG_{2M} = \begin{cases} RG_M \; L_M \\ RG_M \; \overline{L}_M \end{cases}, \tag{7}$$

где L_M, $\overline{L}_M$ - вектор длины M и инверсный ему вектор, для которых элементы формируются на основе маскирования младшего разряда кодового слова.

Тогда справедливы преобразования

BIN→RG→IRG→BIN, BIN→IRG→RG→BIN (8)

При этом полученный обратный двоично – инверсный код Грея теряет свойство цикличности, характерное для других рассмотренных кодов, и обладает свойством дополнения до N для каждой пары (k, k+1) соседних кодовых слов, если k - четное. Можно заметить, что свойство дополнения до N характерно для двоичного кода для каждой пары (k, N-k) кодовых слов, а также и для обратного кода Грея IG для каждой пары (k, k+N/2) кодовых слов. В таблице 1 представлены первые 16 двоичных кодовых слов для рассмотренных кодов.

Таблица 1. Кодовые слова

BIN	G	IG	RG	IRG
0000	0000	0000	0000	0000
0001	0001	0001	1000	1111
0010	0011	0011	1100	0111
0011	0010	0010	0100	1000
0100	0110	0111	0110	0011
0101	0111	0110	1110	1100
0110	0101	0100	1010	0100
0111	0100	0101	0010	1011
1000	1100	1111	0011	0001
1001	1101	1110	1011	1110
1010	1111	1100	1111	0110
1011	1110	1101	0111	1001
1100	1010	1000	0101	0010
1101	1011	1001	1101	1101
1110	1001	1011	1001	0101
1111	1000	1010	0001	1010

Можно предложить рекурсивные алгоритмы построения обратного кода Грея и обратного двоично-инверсного кода Грея на основе принципа дополнения кодового слова до N, что соответствует единицам во всех разрядах числа. Для получения IRG кода на каждом уровне рекурсии исходная последовательность M кодовых слов записывается в четные элементы выходной последовательности размера 2M, а их инверсии – в нечетные соседние элементы. Для получения IG кода исходная последовательность M кодовых слов дополняется до 2M инверсными значениями кодовых слов с M+1 до 2M элементов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотренные двоично – инверсные коды Грея можно использовать в различных задачах цифровой обработки. Например, при спектральном анализе сигналов в базисе функций Уолша – Адамара [4]. Можно показать, что матрицы функций Уолша [W] связаны с матрицами Адамара [H] перестановкой строк по прямому и обратному двоично – инверсным кодам Грея.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gray F. Pulse Code Communication, U.S. Patent 2632058, March 17, 1953.
2. Salomon D. Data Compression: the Complete Reference. - 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 2000, 820p.
3. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 476с.
4. Ахмед Н., Рао К.Р. Ортогональные преобразования при обработке цифровых сигналов: Пер. с англ. - М.: Связь, 1980. - 248с.

ALGORITHMS OF THE GRAY CODES CONSTRUCTION

Sereda S.

IS Department, Murom Institute, Vladimir State University,
23, Orlovsky st., Murom 602200, Russia
e-mail: sereda@mivlgu.murom.ru

INTRODUCTION

The Gray codes are used in many tasks of digital signal processing [1]. For example, the Gray code is one of the steps of JBIG and CWT algorithms of grayscale image compression [2]. There are a lot of Gray codes and algorithms of its construction, but it is interested to research the digital inverse Gray codes.

DIGITAL INVERSED GRAY CODES

Direct (reversed) digital inverse Gray code RG (IRG) that is also known as reflected Gray code, is formed with application of digital inverse permutation (DIP) of direct (reversed) Gray code

G ↔ (DIP) ↔RG, IG↔ (DIP) ↔IRG , (1)

Then we get the recursive formula

$$RG_{2M} = \left(RG_M \, O_M \, , \overline{RG}_M \, I_M \right) \tag{2}$$

Non recursive algorithms of RG and IRG are the same like basic ones of the normal Gray codes with digital inversion of result from the right to the left. Recursive algorithm of IRG code is presented as

$$IRG_{2M} = \left(IRG_M \, L_M \, , \quad IRG_M \, \overline{L}_M \right), \tag{3}$$

where L_M, $\overline{L}_M$ - vector of M order and its inversion for witch elements are formed with masking operation of the lowest bit of the code word. Then

BIN→RG→IRG→BIN, BIN→IRG→RG→BIN (4)

IRG code lost the cyclic property of normal Gray codes, but possess of the addition property for each pare of nearest words (*k, k*+1) as if *k* is even. There are recursive algorithm of IRG code according to addition of the code word at ones in all bits. The initial binary sequence of M words are write in the even elements of output sequence of 2M order and its inversions into next nearest elements.

APPLICATIONS

The considered RG and IRG codes are possible to use in spectral analysis of digital signals in Walsh – Hadamard basis [3]. The matrix of Walsh functions [W] is connected with the matrix of Hadamard functions [H] by means of permutation of rows according to the digital inverse Gray codes.

REFERENCES

[1] Gray F. Pulse Code Communication, U.S. Patent 2632058, March 17, 1953.
[2] Salomon D. Data Compression: the Complete Reference. - 2nd ed. Springer-Verlag, New York, 2000.
[3] Ahmed N., Rao K.R. Ortogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975