ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ОЦЕНИВАНИЯ ЧИСЛА И УГЛОВ ПРИХОДА СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Дзвонковская А.Л.

Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

Оценивание (измерение) углов прихода сигналов (углов места и азимутов) является одной из основных задач обработки информации в радиоизмерительных системах. Эта задача рассматривалась в огромном числе работ, а для ее решения разработаны различные методы, как на основе спектрального анализа, так и на основе параметрической статистической теории.

Рассмотрим антенную систему (АС), состоящую из *M* ненаправленных элементов, расположенных в одной горизонтальной плоскости (взаимное влияние элементов АС отсутствует). В этом случае выходная информация представляется в виде выборки комплексных амплитуд $\vec{x} = \|x_m\|_{M\times 1}$ с вектором математических ожиданий $\vec{s} = \|s_m\|_{M\times 1}$, при этом каждый элемент вектора $\vec{s}$ зависит от углов прихода сигналов $\vec{\beta} = \|\beta_n\|_{1\times N}$ (углов места) и $\vec{\theta} = \|\theta_n\|_{1\times N}$ (азимутов), а также от амплитуд $\vec{A} = \|A_n\|_{1\times N}$ и начальных фаз $\vec{\varphi} = \|\varphi_n\|_{1\times N}$ сигналов, где *N* - априорно известное число сигналов. Векторы параметров $\vec{\beta}$ и $\vec{\theta}$ являются информативными и подлежат оцениванию в априорно известных ограниченных интервалах $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ и $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ соответственно, а векторы параметров $\vec{A}$ и $\vec{\varphi}$ являются неинформативными.

При этом принимаемое колебание по выходу *m*-го элемента АС имеет вид

$$x_m = s_m + n_m \qquad (m = 1,2,\ldots,M), \qquad (1)$$

где $s_m = \sum_{n=1}^{N} A_n \exp\{j(\varphi_n + \mu_m \cos\beta_n \cos(\theta_n - \gamma_m))\}$ - суммарный сигнал от всей совокупности источников излучения, n_m - нормальная помеха с нулевым математическим ожиданием и корреляционной матрицей **K**, $\mu_m = 2\pi D_m/\lambda$, D_m - расстояние между точкой привязки фазы и *m*-м элементом АС, λ - длина волны, γ_m - угол между направлением, относительно которого отсчитывается азимут, и прямой линией, соединяющей точку привязки фазы и *m*-й элемент.

Для оценивания параметров сигналов главным образом используется метод максимального правдоподобия (МП). Пусть вектор всех неизвестных параметров $\vec{\vartheta} = (\vec{A}, \vec{\varphi}, \vec{\beta}, \vec{\theta})$, а вектор только информативных параметров $\vec{\nu} = (\vec{\beta}, \vec{\theta})$. Оценку вектора $\vec{\nu}$ осуществим путем совместной максимизации функции МП по вектору $\vec{\vartheta}$.

Для рассматриваемой задачи используется гауссовская модель случайных процессов, и метод МП приводит к следующему выражению для оценивания параметров:

$$\inf_{\vec{\vartheta}} B(\vec{x}\,|\,\vec{\vartheta}), \qquad (2)$$

где $B(\vec{x}\,|\,\vec{\vartheta}) = \frac{1}{2}\vec{s}^{\,*}(\vec{\vartheta})\mathbf{K}^{-1}\vec{s}(\vec{\vartheta}) - \mathrm{Re}\left\{\vec{x}^{\,*}\mathbf{K}^{-1}\vec{s}(\vec{\vartheta})\right\}$ - логарифмическая функция правдоподобия, символ «*» означает комплексно-сопряженное транспонирование.

Сделав замену $\Phi_n = A_n \exp\{j\varphi_n\}$, $F_{m,n} = \exp\{j\mu_m \cos\beta_n \cos(\theta_n - \gamma_m)\}$, где *n*=1,2,...,*N*, *m*=1,2,...,*M*, по аналогии с [1] вводим вектор-столбец комплексных корреляционных интегралов системы оптимальной обработки $\vec{Q} = \vec{x}^{\,*}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$ и матричную функцию неопределенности сигналов $\Psi = \mathbf{F}^*\mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$. Тогда вместо (2) имеем

$$\inf_{\vec{\vartheta}} \left[\frac{1}{2}\vec{\Phi}^*\Psi\vec{\Phi} - \mathrm{Re}\left\{\vec{Q}\vec{\Phi}\right\}\right]. \qquad (3)$$

Решение задачи оценки информативных параметров при неизвестных значениях неинформативных параметров сигналов проводят так, чтобы выразить последние из системы уравнений МП, а затем подставить их в (3). Отсюда получаем

$$\vec{\Phi} = \Psi^{-1}\vec{Q}^{*}, \qquad (4)$$

и метод МП сводится к выражению

$$\sup_{\vec{\nu}} f(\vec{x}|\vec{\nu}), \quad \text{где} \quad f(\vec{x}|\vec{\nu}) = \vec{Q}\Psi^{-1}\vec{Q}^{*}. \qquad (5)$$

Полученное решение (4) может оказаться некорректным. Тогда вместо функции (5) воспользуемся ее наилучшим приближением по методу наименьших квадратов

$$f(\vec{x}|\vec{\nu}) = \vec{Q}\Psi^{+}\vec{Q}^{*}, \qquad (6)$$

где Ψ^{+} - псевдообратная матрица для матрицы Ψ.

В соответствии с (5) и (6) имеем нелинейную задачу $2N$-мерной оптимизации вещественной, а не комплекснозначной, функции, что дает нам возможность применить многомерный алгоритм поиска максимума функции с редукцией размерности при помощи разверток [2].

Функция $f(\vec{x}|\vec{\nu})$ является нелинейной (в общем случае многоэкстремальной) функцией $2N$ переменных на гиперкубе

$$D = \left\{\vec{\nu} \in R^{2N} : \beta_{\min} \le \nu_n \le \beta_{\max}, \ \theta_{\min} \le \nu_{n+N} \le \theta_{\max}, \ n = 1,2,...,N\right\},$$

для которой необходимо найти $2N$-мерный глобальный максимум. Пусть $\vec{\nu}(y)$ ($y \in [0,\ 1]$) есть непрерывное однозначное отображение отрезка [0, 1] на гиперкуб D. Тогда

$$\sup_{\vec{\nu}\in D} f(\vec{\nu}) = \sup_{y\in[0,1]} f(\vec{\nu}(y)).$$

Для максимизации полученной функции $f(\vec{\nu}(y))$ можно применять многомерный обобщенный алгоритм глобального поиска [2]. Однако этот алгоритм требует большого объема памяти для хранения значений каждой итерации. Поэтому для поиска глобального максимума функции $f(\vec{\nu}(y))$ воспользуемся методом одномерного случайного поиска. Получив окончательное максимальное значение функции и используя неинъективную развертку типа кривой Пеано [2], получаем точку глобального максимума, которую можно уточнить методом деформированного многогранника [3]. Полученные точки максимума и являются искомыми оценками информативных параметров.

Следует отметить, что применение указанного выше алгоритма решения задачи многомерной оптимизации позволяет многократно сократить время нахождения глобального максимума по сравнению с методом перебора на дискретной сетке значений аргументов функции (6).

Потенциальная точность оценивания углов прихода сигналов при больших M и отношениях сигнал/помеха определяется диагональными элементами корреляционной матрицы оценок, обратной к информационной матрице Фишера **I**, элементы которой определяются как

$$\mathrm{I}_{n,k} = \mathbf{E}\left\{\frac{\partial B(\vec{x}\,|\,\vec{\vartheta})}{\partial \vartheta_n}\frac{\partial B(\vec{x}\,|\,\vec{\vartheta})}{\partial \vartheta_k}\right\} \quad (n,k = 1,2,...,4N), \qquad (7)$$

где **E**{·} – оператор математического ожидания. Элементы матрицы **I** здесь не приводятся в силу своей громоздкости.

При априорном знании числа сигналов N = 2 и 3, $\beta_n \in [0, \pi/2]$, $\theta_n \in [0, 2\pi]$ $(n = 1,2,..., N)$ было проведено статистическое моделирование с применением приведенного выше алгоритма решения задачи оптимизации функции (6), а также на основе соотношений (7) определены потенциальные точности оценок углов прихода для независимой однородной выборки комплексных амплитуд.

При рассмотрении выше алгоритма оценивания углов прихода сигналов предполагалось априорное знание числа сигналов. В отсутствии такой информации поиск максимума функции МП $B(\vec{x}|\vec{\vartheta})$ по вектору параметров $\vec{\vartheta}$ следует дополнить поиском по числу сигналов N=1,2,...,$N_{\max}$, где $N_{\max}$ - максимально возможное число сигналов.

Будем рассматривать задачу оценивания числа и углов прихода сигналов как многоальтернативную проверку сложных гипотез. Гипотезе H_N будет соответствовать наличие N сигналов, и при этом считаем, что случая отсутствия сигналов нет. Параметрическая априорная неопределенность при гипотезе H_N заключается в том, что неизвестны значения комплексных амплитуд на выходе элемента АС, которые зависят от углов прихода сигналов. При этом гипотеза H_N включает в себя как частные случаи все гипотезы H_i при $i \le N$.

Правило принятия решения о числе сигналов с оценкой их параметров может быть основано на методе отношения МП [4]. Тогда оно формулируется следующим образом: принимается гипотеза H_N о наличии N сигналов, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} \sup\limits_{\vec{\nu}^{(N)}} f(\vec{\nu}^{(N)}) > \sup\limits_{\vec{\nu}^{(i)}} f(\vec{\nu}^{(i)}) \quad \text{при} \quad i = 1, 2, ..., N-1, \\ \sup\limits_{\vec{\nu}^{(N)}} f(\vec{\nu}^{(N)}) \ge \sup\limits_{\vec{\nu}^{(i)}} f(\vec{\nu}^{(i)}) \quad \text{при} \quad i = N, N+1, ..., N_{\max}, \end{cases}$$

и отвергается эта гипотеза, если нарушено хотя бы одно из них, где $\vec{\nu}^{(i)}$ - вектор $\vec{\nu}$ при наличии i сигналов.

Литература

1. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. Статистическая теория измерительных радиосистем.-М.: Радио и связь, 1981.
2. Стронгин Р.Г. Численные методы в многоэкстремальных задачах.-М.:Наука, 1978.
3. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.-М.:Мир, 1975.
4. Леман Э. Проверка статистических гипотез. -М.:Наука, 1979.

MULTIDIMENSIONAL OPTIMIZATION APPLICATION TO THE PROBLEM OF NUMBER OF SIGNALS AND SIGNAL ARRIVAL ANGLES ESTIMATION BASED ON THE MAXIMUM LIKELIHOOD METHOD

Dzvonkovskaya A.
Bauman Moscow State Technical University

Signal arrival angles (azimuths and elevations) estimation is one of the basic problems in signal processing. We consider this problem using parametrical statistical theory, in particle, parameter estimation based on the maximum likelihood method.

If we have a horizontal antenna array than antenna element output information contains signal and noise terms. The noise term is a Gaussian noise with zero mean and correlation matrix **K**. The signal term depends on informative parameters (azimuths and elevations) and uninformative parameters (amplitudes and phases). Moreover, azimuths and elevations are to be measured inside a priori known intervals.

Since the uninformative parameters are found via maximum likelihood equation system, we get a function to be maximized to get informative parameters estimates for a priori known number of signals. Thus a multidimensional optimization problem is obtained. Using different numerical optimization techniques to solve this problem we get a computation gain versus using a simple search method.

Also we derived the elements of Fisher information matrix for any a priori known number of signals and arbitrarily spaced antenna elements. The diagonal elements of the inverse Fisher matrix are our estimating parameters variances.

Statistical simulations are conducted to compare estimation errors resulted from our optimization procedure with their quantitative estimates using a Fisher matrix.

If we have no information about number of signals we have to consider the statistical hypothesis testing problem. To estimate the number of signals and the signal arrival angles simultaneously the decision rule is based on the maximum likelihood ratio test. We obtain an inequality system to decide between different statistical hypothesizes applying our optimization procedure for every hypothesis.