ИНФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ, ИМЕЮЩИХ АНАЛОГОВУЮ ПРИРОДУ

Архангельский С.В., Редькин Н.П.

Научно-производственный центр информационных и транспортных систем
443001, Самара, ул. Полевая, 47
E-mail infotran@metron.samara.ru
Тел. (8462) 32-53-17. Факс (8462) 32-31-66
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
119992, Москва, Воробьевы горы, МГУ, механико-математический факультет
E-mail redkin@inria.msu.ru

С учетом обусловленных практическим опытом особенностей и ограничений (они указаны, например, в [2,3]) в качестве математической модели *аналогового сигнала* возьмём функцию

$$\varphi(t) = \sqrt{2 / T} \sum_{k=0}^{T/2-1} (a_{2k} \cos \pi(2k+1)(t / T) + a_{2k+1} \sin \pi(2k+1)(t / T)) ,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{T-1} \in \mathbf{R}$, а T – натуральное четное число. Здесь и ниже используются следующие обозначения: **R, Z, N** — множества соответственно действительных, целых и натуральных чисел; если B — некоторое множество, а J — некоторое свойство, то $\{x\in B:J\}$ — множество, состоящее из элементов множества B, обладающих свойством J; через $\lfloor a \rfloor$ обозначаем наибольшее целое число, не большее a.

Цифровой сигнал получается проецированием аналогового сигнала на решетку Q, представляющую собой конечное множество точек на плоскости E^2 с системой координат (t, y). Предполагается, что на указанной плоскости функция φ(t) (аналоговый сигнал) задана уравнением $y = \varphi(t)$.

Введём дискретные множества на осях системы координат (t,y), которые называются соответственно дискретизацией и квантизацией. *Дискретизацией* с *длительностью* (сигнала) T, *плотностью дискретизации* θ, $\theta\in N$, и *локальным ограничением* ρ, $\rho\in\{1, 2, \ldots, \theta\}$, называется множество $\Psi = \{t = i + (\tau / \theta) : i \in\{0, 1, \ldots, T-1\}, \tau \in \mathbf{Z} \cap [-\rho/2, \rho/2)\}$. *Квантизацией* с *плотностью квантования* β, $\beta \in \mathbf{N}$, называется множество $\Phi = \{ y\colon \beta y \in \mathbf{Z}\}$. *Решеткой* с *дискретизацией* Ψ и *квантизацией* Φ называется множество $Q = \{d = (t, y) \in E^2\colon t \in\Psi, y\in \Phi\}$. Числа T, θ, ρ, β называются *параметрами решетки* Q.

Пусть $a \in \mathbf{R}$; число $\lfloor \beta a\rfloor$ назовем *цифровым представлением* числа a с плотностью квантования β. *Цифровым сигналом* от аналогового сигнала φ(t) над решеткой Q называется функция $\varphi_ц : \Psi \to \Phi$, удовлетворяющая равенству $\varphi_ц (t) = \lfloor\beta\varphi (t)\rfloor$ при всех $t\in\Psi$.

Описанный здесь процесс получения цифрового сигнала из аналогового называется *аналого-цифровым преобразованием*, а устройство, его совершающее, — *аналогово-цифровым преобразователем.*

В качестве меры количества информации, содержащейся в цифровом сигнале заданного класса, берётся *энтропия* (двоичный логарифм мощности множества) этого класса. Установлено [1,2], что множество всех аналоговых сигналов с «информативной» длительностью T эквивалентно T-мерному евклидову пространству E^T. Подкласс аналоговых сигналов задаётся некоторой областью $F \subseteq E^T$. Оказалось, что энтропия класса цифровых сигналов $\varphi_ц(t)$, получающихся из аналоговых сигналов φ(t) , задаваемых областью F, зависит от множества F и решётки Q; это означает, что энтропия зависит от параметров аналогово-цифрового преобразователя и от характеристик области F.

Основным результатом, полученным при исследовании цифровых сигналов, является оценка так называемой *удельной энтропии*, отражающей влияние параметров решётки на информационную «ёмкость» цифровых сигналов; понятие удельной энтропии связывается с единичным объёмом упоминавшейся выше области F. Из оценки следует, что на количество информации (удельную энтропию) влияют три параметра решётки: длительность T, плотность β квантования сигнала по амплитуде и плотность θ дискретизации сигнала по аргументу. При этом параметры β и θ оказывают (в асимптотике) одинаковое влияние на энтропию.

Этот новый факт опровергает бытовавшее мнение, согласно которому нет смысла делать частоту дискретизации больше минимально допустимой — в соответствии с известной теоремой В.А.Котельникова (безусловно справедливой, но предполагающей абсолютно точное, а не приближённое измерение сигналов).

Практическое значение установленного факта заключается в том, что он открывает и подтверждает возможность повышения информационной ёмкости цифровых сигналов путём увеличения плотности дискретизации (а не только плотности квантования), что весьма существенно, поскольку на практике обычно бывает значительно проще увеличить количество измерений величины сигнала, а не точность измерений.

Список литературы

[1] Архангельский С.В. Информационный анализ цифровых сигналов. – Издательство Саратовского университета, Самарский филиал, 1991.

[2] Архангельский С.В., Редькин Н.П. Информационные свойства аналого-цифровых преобразований сигналов // Математические вопросы кибернетики. Вып.7. – М.: Наука. Физматлит, 1998, с. 9 – 54.

[3] Архангельский С.В., Редькин Н.П. Информационные процессы в аналого-цифровых преобразователях // Проблемы управления и моделирования в сложных системах. Труды III Международной конференции. — Самара, 2001, с. 528-534.