РАЗРАБОТКА МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПУЛЬСОВОГО МЕХАНИЗМА НА ОСНОВЕ ВОЛНОВОГО ПОДХОДА

Булдакова Т.И., Суятинов С.И.

Саратовский государственный технический университет

Синергетика и ее концепция параметров порядка позволяют глубже понять механизмы функционирования сложных систем и описать их с помощью простых модельных уравнений. В частности представляет большой интерес цифровая обработка измерительной информации с целью построения модельного уравнения пульсации артерий. В качестве измерительной информации используется пульсовый сигнал. В соответствии с канонами тибетской медицины такая модель позволяет определить различные заболевания.

Несомненно, что модели носят нелинейный характер. Однако согласно теореме Гробмана - Хартмана, в некоторой окрестности динамическая система топологически эквивалентна некоторой линейной системе. В рассматриваемом случае такой окрестностью является положение устойчивого равновесия в виде предельного цикла. Поэтому рассмотрим метод получения модели пульсового механизма в виде линейных дифференциальных уравнений на основе волнового подхода [1].

Регистрируемые биосигналы (сердечные ритмы, пульсовые сигналы, функции внешнего дыхания) имеют хорошо различимые волнообразные формы (рис. 1). Поэтому к ним может быть применено волновое представление.

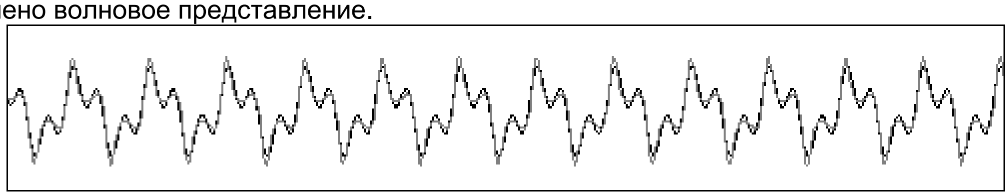

Рис. 1. Запись пульсового сигнала

Линейное волновое описание - это представление регистрируемого сигнала $w(t)$ в функциональном пространстве, в котором базисом является конечный набор функций $f_i(t)$, $i = 1,\ldots, m$.

$$w(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_m f_m(t). \qquad (1)$$

Здесь c_i - это кусочно-постоянные весовые коэффициенты.

Сигнал $w(t)$, согласно уравнению (1), может быть представлен в момент времени t некоторой взвешенной линейной комбинацией известных базисных функций $f_i(t)$, имеющих неизвестные весовые коэффициенты c_i. Причем коэффициенты c_i могут время от времени скачком изменять свои значения случайным кусочно-постоянным образом.

Для исследования поведения системы часто удобнее использовать описание сигналов не в виде уравнения (1), а в виде уравнения соответствующей модели состояния, представляемой дифференциальным уравнением, которому функция $w(t)$ удовлетворяет почти всюду. Для получения такого дифференциального уравнения будем использовать теорию операционного исчисления.

Уравнение (1) можно рассматривать как известное общее решение искомого неизвестного дифференциального уравнения модели. Эта задача (дано решение, найти уравнение) в теории дифференциальных уравнений называется обратной, и в общем случае она имеет множество решений. В данном случае задача облегчается, так как известны базисные функции f_i.

Предположим, что для каждой такой функции $f_i(t)$ существует преобразование по Лапласу

$$f_i(s) = \frac{P_i(s)}{Q_i(s)}. \qquad (2)$$

Коэффициенты c_i будем временно рассматривать как константы. Тогда

$$w(s) = c_1 \cdot f_1(s) + c_2 \cdot f_2(s) + \ldots + c_m \cdot f_m(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \qquad (3)$$

где $P(s)$ и $Q(s)$ соответственно полиномы p -й и q -й степени, $0 \le p \le q < \infty$.

Полином числителя включает коэффициенты c_i, а полином знаменателя является наименьшим общим знаменателем среди совокупности полиномов знаменателей $Q_i(s)$ в преобразованных по Лапласу базисных функциях $f_i(s)$.

Перепишем уравнение (3) в следующем виде

$$w(s) = \frac{1}{Q(s)} \cdot P(s). \tag{4}$$

Тогда сигнал $w(t)$, как указано в [2], в соответствии с теорией операционного исчисления можно рассматривать как выходную переменную фиктивной линейной динамической системы с передаточной функцией, равной $\frac{1}{Q(s)}$. На входе такой системы сигнал отсутствует, а ее функционирование обеспечивается ненулевыми начальными условиями. Другими словами, ненулевые начальные условия $\{w(0), \dot{w}(0), \ddot{w}(0), \ldots\}$ при использовании преобразования Лапласа дают полином $P(s)$ в уравнении (4).

Представим функцию $Q(s)$ в виде

$$Q(s) = s^p + q_p s^{p-1} + q_{p-1} s^{p-2} + \ldots + q_1. \tag{5}$$

Тогда сигнал $w(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными параметрами:

$$\frac{d^p w}{dt^p} + q_p \cdot \frac{d^{p-1} w}{dt^{p-1}} + q_{p-1} \cdot \frac{d^{p-2} w}{dt^{p-2}} + \ldots + q_2 \cdot \frac{dw}{dt} + q_1 w = 0. \tag{6}$$

Коэффициенты q_j известны, так как они определяются структурой преобразования Лапласа от базовых функций f_i, которые предполагаются известными.

Выше предполагалось, что коэффициенты в уравнении (1) являются постоянными, и при этом предположении было получено уравнение (6). Чтобы учесть математически возможные скачкообразные изменения коэффициентов c_i, в [1] предлагается добавить к однородному уравнению (6) внешнюю вынуждающую силу $\delta(t)$, которая состоит из последовательности случайно появляющихся импульсных функций Дирака.

Таким образом, модельное уравнение окончательно примет вид

$$\frac{d^p w}{dt^p} + q_p \cdot \frac{d^{p-1} w}{dt^{p-1}} + \ldots + q_1 \cdot w = \delta(t). \tag{7}$$

Заметим, что импульсная вынуждающая функция $\delta(t)$ совершенно неизвестна и включена в математическую модель с символической целью для описания неизвестных скачков коэффициентов c_i. Кроме того, скачки коэффициентов, вследствие введения импульсной функции $\delta(t)$, приводят к «обновлению» модели. Другими словами, появление импульсной вынуждающей функции $\delta(t)$ на входе системы приводит к тому, что модель стартует как бы заново, с новыми начальными условиями.

Разработанная модель (уравнение (7)) описывает функционирование линейной стационарной системы с ненулевыми начальными условиями, которая генерирует волнообразные сигналы $w(t)$. При этом если $w(t)$ является многомерным возмущением, имеющим l компонентов, т.е. $w = (w_1, w_2, \ldots, w_l)$, то модель состояния вида (7) должна быть получена для каждой независимой компоненты $w_i(t)$.

Алгоритм формирования модели системы в виде линейного дифференциального уравнения p - го порядка состоит из следующих шагов.

1. Выявление базисных функций f_i экспериментального сигнала $w(t)$.
2. Представление преобразованных по Лапласу базисных функций в виде (2).
3. Вычисление полинома $Q(s)$ как наименьшего общего знаменателя среди знаменателей преобразованных по Лапласу базисных функций.
4. Формирование коэффициентов q_i, т.е. представление $Q(s)$ в виде (5).
5. Формирование модели системы в виде (7).

Основной трудностью, с которой сталкивается исследователь при применении волнового подхода, является выбор базисных функций в уравнении (1). От этого выбора зависит численное значение порядка уравнения (7). Так, базисные функции, которые аппроксимируют запись сигнала $w(t)$ на относительно длинных интервалах времени, приводят к меньшим значениям порядка за счет усложнения алгебраической структуры уравнения (7). Если же $f_i(t)$ выбраны так, что аппроксимируют $w(t)$ на относительно коротких интервалах, то структура уравнения (7) упрощается за счет, как правило, большего значения порядка.

Кроме того, выбор базисных функций определяет частоту скачков c_i. Поэтому базисные функции в уравнении (1) должны выбираться так, чтобы частота скачков c_i находилась в пределах динамических возможностей реальной системы. Таким образом, необходим компромисс между точностью аппроксимации волновых форм $w(t)$ и частотой скачков c_i. Выбор базисных функций для пульсового сигнала может основываться либо на анализе формы пульсовой волны, либо исходя из физических соображений [3]. Анализ формы пульсового сигнала с помощью нейронных сетей приведен в [4]. В данной работе в качестве базисной функции сигнала (рис. 2) выберем затухающую синусоиду $y(t) = e^{-\alpha t} \cdot \sin \beta t$.

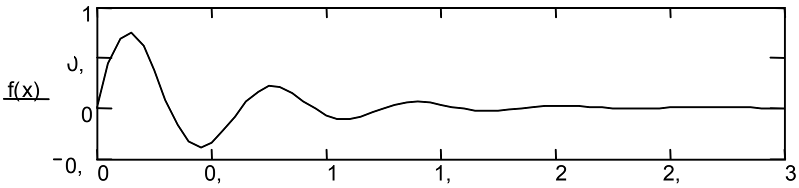

Рис. 2. Базисная функция

Тогда в соответствии с алгоритмом модель состояния будет иметь вид

$$\frac{d\ddot{w}}{dt} + 2\alpha \frac{d\ddot{w}}{dt} + \left(\alpha^2 + \beta^2\right)\frac{dw}{dt} = \delta(t). \qquad (8)$$

Результаты решения уравнения определяются параметрами α и β для конкретного вида пульсовой волны. Функция $\delta(t)$ – периодическая вынуждающая функция. Реконструированная модель (8) может использоваться для оценки состояния системы или анализа ее поведения.

Источники информации

1. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах / Под ред. К.Т. Леондеса. - М.: Мир, 1980. - 408 с.
2. Салычев О.С., Быковский А.В. Волновой метод оценивания вектора состояния динамической системы. - Вестник МГТУ. Серия "Приборостроение", 1990, № 1. С. 4 - 13.
3. Булдакова Т.И., Суятинов С.И. Лысункин В.В. Два подхода к регистрации и анализу пульсограмм // Материалы международной научно-технической конференции "Конверсия, приборостроение, медицинская техника". - Владимир, 1999. - С. 186-188.
4. Булдакова Т.И., Суятинов С.И. Метод нейросетевой реконструкции систем - Информационные технологии, 2002, № 7. – С. 37-40.

DEVELOPMENT OF THE MODEL EQUATION OF THE PULSE MECHANISM ON THE BASIS OF THE UNDULAR APPROACH

Bouldakova T., Suaytinov S.

Synergetics and its concept of order parameters allow deeper to understand mechanisms of operation of composite systems and to describe them with the help of the simple model equations. It is doubtless, that the models wear nonlinear character. However in some neighbourhood the dynamic system topologically is equivalent to some linear system. Therefore we shall consider a method of obtaining of model of the pulse mechanism as the linear differential equations on the basis of the undular approach.

Recorded biosignals (cardiac rhythms, pulse signals, the functions of external respiration) have the well discernible undulating forms. Therefore the undular representation can be applied to them.

The linear undular description is a representation of a recorded signal $w(t)$ in a function space, in which one basis is the final menu function $f_i(t)$, i = 1,…, m,

$$w(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + \ldots + c_m f_m(t). \qquad (1)$$

Here c_i are piecewise constant weighting coefficients.

And the coefficients c_i can occasionally by spring change the values by a random piecewise constant means.

For research of a system behaviour it is frequently to use the description of signals not as the equation (1), and as the equation of appropriate model of a state represented by the differential equation, which one the $w(t)$ function contents almost everywhere. For obtaining such differential equation we shall use the theory of an operational calculus.

The equation (1) can be surveyed as known common solution of a required unknown of the differential equation of model. This task (is given solution, to find the equation) in the theory of the differential equations is named return, and generally it has set of solutions. In this case task is easied, as the basic functions f_i are known.

In the report is shown, that the model equation can be obtained as

$$\frac{d^p w}{dt^p} + q_p \cdot \frac{d^{p-1} w}{dt^{p-1}} + \ldots + q_1 \cdot w = \delta(t).$$

The example of construction of the model equation under the data of gauging of pulse signal and approaching choice of basic functions is given. The model equation of pulse mechanism has the order equal 3 and is determined on the basis of digital processing of the measuring information.