ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ В ЗАДАЧАХ ПРОЕКТИРОВНИЯ И ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ

Миронов В.Г.

Московский энергетический институт (ТУ), Кафедра Электрофизики

В докладе рассматриваются задачи по вычислению собственных значений матриц (в общем случае больших), которые имеют место на этапе оптимизации одномерных систем обработки сигналов, а также при обработке изображений на этапе их реставрации. Предлагаются наиболее эффективные пути решения этих задач.

При оптимизации цифро-аналоговых одномерных систем на базе цепей с переключаемыми конденсаторами (ЦПК) распределение допусков на параметры системы можно выполнять с помощью псевдообратных матриц чувствительности [1]. Будем считать что

$$\Delta\overline{F} = \left[\Delta\overline{F}_1 \quad \Delta\overline{F}_2 \quad \dots \quad \Delta\overline{F}_{N_F}\right]^T \tag{1}$$

заданный вектор допустимых отклонений частотной характеристики от номинальных значений при частотах $\omega = \omega_k, k = 1 \dots N_F$. Отклонение значения реализованной характеристики $F(\omega_k, \xi)$, где ξ - вектор искомых параметров, в линейном приближении определим как

$$\Delta F_k = \Delta F(\omega_k, \xi) = \left[\nabla F(\omega_k, \xi)\right]^T \Delta\xi, \tag{2}$$

где $\Delta\xi = \xi - \xi^0$-отклонение текущих параметров ξ от номинальных ξ^0. Записывая (2) для всех значений k , получаем

$$\Delta F = (\nabla F)^T \xi, \tag{3}$$

где

$$\Delta\overline{F} = \left[\Delta\overline{F}_1 \quad \Delta\overline{F}_2 \quad \dots \quad \Delta\overline{F}_{N_F}\right]^T. \tag{4}$$

Вектор отклонений реализованной характеристики;

$$\Delta\overline{F} = \left[\Delta\overline{F}(\omega_1, \xi^0) \quad \Delta\overline{F}(\omega_2, \xi^1) \quad \dots \quad \Delta\overline{F}(\omega_{N_F}, \xi^0)\right]^T \tag{5}$$

матрица размера $N \times N_F$ с элементами

$$(\nabla F)_{ik} = \partial F(\omega_k, \xi) / \partial\xi_i, \tag{6}$$

определенными при $\xi = \xi^0 (k = 1 \dots N_F, i = 1 \dots n)$, т.е. прямоугольная матрица абсолютных чувствительностей функции $F(\omega, \xi)$ к изменениям параметров в соответствующих точках.

Определим вектор $\Delta\xi = \Delta\xi^0$, минимизирующий квадрат евклидовой нормы разности векторов $\Delta\overline{F}$ и ΔF, т.е.

$$\| \Delta\overline{F} - \Delta F \|^2 = \| \Delta\overline{F} - (\nabla F)^T \Delta\xi \|^2 . \tag{7}$$

Этот вектор определяется равенством

$$\Delta\xi^0 = \left[(\nabla F)^T\right]^+ \Delta F, \tag{8}$$

где $\left[(\nabla F)^T\right]^+$ - псевдообратная матрица (по отношению к матрице $(\nabla F)^T$). Обычно $N_F > N$ и в этом случае

$$\left[(\nabla F)^T\right]^+ = \left[(\nabla F)(\nabla F)^T\right]^{-1} \Delta F, \tag{9}$$

если столбцы матрицы $(\nabla F)^T$ являются линейно независимыми. Если заданы ΔF^+ и $\Delta\overline{F}^-$ - верхняя и нижняя границы отклонений характеристики, то определяют два вектора допусков

$$\Delta\xi^{0+} = \left[(\nabla F)^T\right]^+ \Delta\overline{F}^+, \tag{10}$$

$$\Delta\xi^{0-} = \left[(\nabla F)^T\right]^+ \Delta\overline{F}\,. \qquad (11)$$

При этом вектор $|\,\Delta\xi^0\,|$ образуем как

$$|\,\Delta\xi^0\,| = \min\left(|\,\Delta\xi^{0+}\,|, \delta sf\right). \qquad (12)$$

Значения допусков, вычисляемые по выражениям (10), (11) можно использовать для решения задачи центрирования области работоспособности.

Реставрация изображений представляет собой выполнение инверсии (обращения) искажений, внесенных в оригинал [2]. В преобразованной области (области отображения) справедливо уравнение

$$G = AFB, \qquad (13)$$

где G и F отображают изображение и оригинал, A и B -искажение столбцов и строк. Когда матрица F является разделимой и пространственно-зависимой,

$$F = A \otimes B^T, \qquad (14)$$

где $\otimes$ - знак прямого, или кронекерова произведения матриц. Если A и B - неособенные матрицы то из (13) легко определить F. Выполнение этого условия весьма маловероятно, так как системы отображения вызывают обычно невосполнимую потерю некоторых деталей изображения. В этом случае можно получить псевдообратную оценку оригинала

$$\widehat{F} = A^+ G B^+, \qquad (15)$$

где A^+ и B^+ обозначают псевдообратные матрицы (по отношению к A и B).

При реставрации изображений с аддитивным шумом справедливо уравнение

$$g = Hf + n, \qquad (16)$$

где g и f - векторы, соответствующие отображению и оригиналу, n - вектор содержащий отсчеты шума, H - матрица (необязательно квадратная), соответствующая матричной импульсной характеристике. Хорошей оценкой оригинала f является

$$\widehat{f} = H^+ g, \qquad (17)$$

где H^+ - псевдообратная матрица (по отношению к H). В присутствии шума в уравнении (16)

$$\widehat{f} = H^+ H f + H^+ n. \qquad (18)$$

Если обработка изображения выполняется с помощью вейвлет преобразования, то также возможно применение псевдообращения матриц. В частности, при субполосном кодировании отсчеты сигнала и фильтра связаны матричными соотношениями [3]:

$$y = H^T x, \widehat{x} = Gy, \qquad (19)$$

где x и y - векторы, соответствующие отсчетам сигнала и фильтра. Из (19) следует связь сигналов на входе и выходе системы

$$\widehat{x} = GH^T x \qquad (20)$$

где H и G - матрицы, элементы которых представляют собой отсчеты (в том числе сдвинутые) импульсных характеристик. Столбцы матрицы G называют базисными функциями синтеза, а столбцы H - функциями анализа. Из (20) следует, что система анализа-синтеза обладает свойствами полного восстановления если $GH^T = 1$.

Если матрица H особенная, то можно построить систему с полным восстановлением, используя псевдообращение H. При особенной матрице G условия полного восстановления можно выразить через псевдообратную матрицу G.

Псевдообращение матриц эффективно выполняется, если вычислить разложение матриц по сингулярным значениям [4]. При больших матрицах сингулярные значения можно вычислить, используя диакоптику Г. Крона [5], однако в этом случае необходимо построение «цепи пересечений» из схемной модели. Если такая модель отсутствует, то можно прибегнуть к расщеплению спектра матриц [6].

Литература

1. Миронов В. Г., Немов Ю. Н. Некоторые задачи оптимизации при проектировании электронных цепей и систем. М.; Вестник МЭИ, №3 2000г.,с. 82-87.
2. Обработка изображений и цифровая фильтрация. Под редакцией Т. Хуанга, М.; Мир, 1979.
3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет преобразования. Санкт-Петерербург, 1999, с. 202.
4. Миронов В.Г. Применение псевдообращения матриц для обработки изображений. Доклады международной конференции «информационные средства и технологии», том 1. М.: Станкин, с. 101-104.
5. Крон Г. Исследование сложных цепей по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972, с. 544.
6. Валеев К.Г. Расщепление спектра матриц. Киев, Вища школа, 1986, с. 272.

MATRIX EIGENVALUES PROBLEMS FOR DESIGN AND APPLICATION OF MULTIDIMENSIONAL SYSTEMS

Mironov V.

Moscow Power Engineering Institute (Technical University)
Department of Electrical Physics
105835, GSP, Moscow E-250, 17 Krasnokazarmennaya st.
Phone: +7 (095) 362 7463

During optimization of tolerance distribution of 1D digital-analog circuits based on switching conductors one can use quasi-inverse sensitivity matrix [1]. Image reconstruction method using quasi matrix inversion is discussed for images degraded by multiplicative and additive noises [2]. It is shown that one can consider wavelet transform in terms of quasi-inverse matrices. The quasi-inversion is effectively performed by means of singular values matrix decomposition [4] which can be easily calculated (if matrix is large) using Krons diacoptic [5] and “circuit of crossings” or if there is no such circuit by matrix spectrum splitting [6].

References

1. Миронов В. Г., Немов Ю. Н. Некоторые задачи оптимизации при проектировании электронных цепей и систем. М.; Вестник МЭИ, №3 2000г.,с. 82-87.
2. Обработка изображений и цифровая фильтрация. Под редакцией Т. Хуанга, М.; Мир, 1979.
3. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет преобразования. Санкт-Петерербург, 1999, с. 202.
4. Миронов В.Г. Применение псевдообращения матриц для обработки изображений. Доклады международной конференции «информационные средства и технологии», том 1. М.: Станкин, с. 101-104.
5. Крон Г. Исследование сложных цепей по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972, с. 544.
6. Валеев К.Г. Расщепление спектра матриц. Киев, Вища школа, 1986, с. 272.