

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел. (0852) 79-77-75. E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Реферат. В работе находится зависимость мощности шума в восстановленном изображении от мощности шума квантования в различных полосах его вейвлет преобразования.

Введение

В настоящее время вейвлет преобразование нашло широкое применение, в частности, в области сжатия изображений. В большинстве алгоритмов сжатия, использующих вейвлеты, применяется равномерное квантование вейвлет коэффициентов, в то же время применение различного шага квантования для разных полос вейвлет преобразования позволит повысить эффективность алгоритмов. Для того чтобы разрабатывать такие алгоритмы нужно знать каким образом шум квантования в той или иной полосе преобразования влияет на шум в восстановленном изображении.

Одну стадию обратного одномерного вейвлет преобразования можно представить, как изображено на рис.1, где c и d - коэффициенты вейвлет преобразования, $\uparrow 2$ - операция добавления нулевых отсчетов, h и g – коэффициенты фильтров, x – отсчеты восстановленного изображения, x^q - квантованные отсчеты восстановленного изображения.

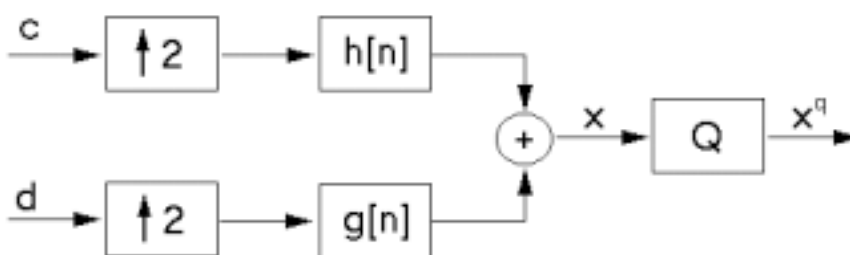


Рис. 1. Графическое представление обратного вейвлет преобразования

Отсчеты восстановленного изображения можно представить как [1]:

$$x[i] = \sum_{n=0}^{N-1} (h[n] \cdot c'[i-n] + g[n] \cdot d'[i-n]),$$

где c' и d' - коэффициенты, полученные из коэффициентов преобразования, путем добавления нулевых отсчетов, N – «длина» фильтров.

Следовательно:

$$e_x[i] = \sum_{n=0}^{N-1} (h[n] \cdot e_c'[i-n] + g[n] \cdot e_d'[i-n]),$$

где, e – соответствующие ошибки квантования.

Т.к. среднее значение ошибок квантования равно нулю [2]:

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования России

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \langle e_x[i] \cdot e_x[i] \rangle = \\ &= \langle \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} (h[n] \cdot e_{c'}[i-n] + g[n] \cdot e_{d'}[i-n]) \right\} \cdot \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} (h[m] \cdot e_{c'}[i-m] + g[m] \cdot e_{d'}[i-m]) \right\} \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[n] \cdot h[m] \cdot \langle e_{c'}[i-n] \cdot e_{c'}[i-m] \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} g[n] \cdot h[m] \cdot \langle e_{d'}[i-n] \cdot e_{c'}[i-m] \rangle + \\ &+ \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} h[n] \cdot g[m] \cdot \langle e_{c'}[i-n] \cdot e_{d'}[i-m] \rangle + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} g[n] \cdot g[m] \cdot \langle e_{d'}[i-n] \cdot e_{d'}[i-m] \rangle. \end{aligned}$$

Вследствие того, что отсчеты одной и той же полосы представляют собой «белый шум», а отсчеты разных полос некоррелированы, получим:

$$\sigma_x^2 = \sum_{n=0}^{N-1} h^2[n] \cdot \sigma_{c'}^2 + \sum_{n=0}^{N-1} g^2[n] \cdot \sigma_{d'}^2,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} h^2[n] = \sum_{n=0}^{N-1} g^2[n] = 1,$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_{c'}^2 + \sigma_{d'}^2. \quad (1)$$

Отсчеты c' получены из отсчетов c с добавлением нулевых отсчетов, следовательно:

$$\sigma_{c'}^2 = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{\frac{L}{2}-1} (c'[2i] - c'^q[2i])^2,$$

где L - длина последовательности $\{c'\}$, $c'^q[i]$ - квантованные отсчеты последовательности.

$$\sigma_c^2 = \frac{2}{L} \sum_{i=0}^{\frac{L}{2}-1} (c[i] - c^q[i])^2,$$

$$c'[2i] = c[i].$$

Следовательно:

$$\sigma_{c'}^2 = \frac{1}{2} \sigma_c^2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} (\sigma_c^2 + \sigma_d^2) \quad (3)$$

Обобщая результат на двумерное преобразование и M стадий разложения:

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^M \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^j \cdot \sum_i \sigma_{j,i}^2 \right\} + \left(\frac{1}{4} \right)^M \sigma_s^2, \quad (4)$$

где $i=\{h,v,d\}$ – полоса вейвлет преобразования, j – стадия разложения, σ_s^2 - мощность шума квантования в масштабной копии.

Следует отметить, что полученные в результате обратного вейвлет преобразования отсчеты изображения – неквантованы. В результате квантования к (4) добавляется дополнительный шум σ_0^2 .

Т.к. распределение ошибки квантования равномерно, а значение ошибки лежит в пределах $[-0,5; 0,5]$, то [3] $\sigma_0^2 = 0,083$.

Окончательно:

$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^M \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^j \cdot \sum_i \sigma_{j,i}^2 \right\} + \left(\frac{1}{4} \right)^M \sigma_s^2 + 0,083 \quad (5)$$

Экспериментальные исследования

В таблице 1 приведены значения рассчитанной по формуле (5) и полученной экспериментально мощности шума для изображения Lena и различных шагов квантования (вейвлет Daub 2, одна стадия двумерного разложения).

Таблица 1.

Шаг квантования	Рассчитанное значение σ_x^2	Измеренное значение σ_x^2
0,3	0,76	0,75
0,5	0,38	0,39
0,7	0,21	0,19
0,9	0,16	0,15

В таблице 2 приведены значения рассчитанной по формуле (5) и полученной экспериментально мощности шума для изображения Lena и различного числа стадий разложения (вейвлет - Daub 2, двумерное разложение с шагом квантования 0,5).

Таблица 2.

Количество стадий разложения	Рассчитанное значение σ_x^2	Измеренное значение σ_x^2
1	0,38	0,39
2	0,42	0,38
3	0,29	0,33

В таблице 3 приведены значения рассчитанной по формуле (5) и полученной экспериментально мощности шума для других изображений (вейвлет - Daub 16, одна стадия двумерного разложения с шагом квантования 0,7).

Таблица 3.

Название изображения	Рассчитанное значение σ_x^2	Измеренное значение σ_x^2
«Лес»	0,25	0,23
«Остров»	0,41	0,48
«Горы»	0,24	0,23

Заключение

Формула (5) показывает зависимость мощности шума в восстановленном изображении от мощности шума квантования вейвлет коэффициентов. Как показывает практика, эта формула в целом верна для широкого спектра вейвлет преобразований, шагов квантования, типов изображений и количества стадий разложения. Используя (5), возможно перераспределить шум по вейвлет полосам так, что мощность шума в восстановленном изображении не изменится, и в то же время возрастет качество изображения за счет внесения шума в менее важные полосы [4] вейвлет преобразования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
2. L. D. Davisson, "Rate-Distortion Theory and Application", *Proceedings of the IEEE*, pp. 156-164, July 1972.
3. Приоров А.Л., Ганин А.Н., Хрящев В.В. *Цифровая обработка изображений: Учеб. пособие / Ярослав. гос. ун-т. – Ярославль, 2001. 218 с.*
4. Ганин А.Н. Модель квантования вейвлет коэффициентов // докл. 4-ой междунар. конф. и выставки «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (DSPA'2002), Москва, 2002. Т.2. С. 240-241.



INVERSE WAVELET TRANSFORM OF QUANTIZATION NOISE*

Ganin A.

Yaroslavl State University
150000, Russia, Yaroslavl, Sovetskaya st., 14
Phone (0852) 79-77-75. E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Abstract. Relation between power of quantization noise in the different bands of wavelet transform and power of noise of reconstructed picture is analyzed.

The samples of reconstructed picture may be present as [1]:

$$x[i] = \sum_{n=0}^{N-1} (h[n] \cdot c'[i-n] + g[n] \cdot d'[i-n]),$$

where c', d' - are coefficients, obtained from c and d by add zero, N - length of filters.

Consequently:
$$e_x[i] = \sum_{n=0}^{N-1} (h[n] \cdot e_c[i-n] + g[n] \cdot e_d[i-n]),$$

where, e - corresponding quantization errors.

Finding a dispersion of e_x [2] we obtain for one stage of one-dimensional transform:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2} (\sigma_c^2 + \sigma_d^2), \quad (1)$$

where σ_x^2 - is a power of noise of reconstructed picture, σ_c^2, σ_d^2 - is a power of quantization noise in the wavelet bands.

More common result:
$$\sigma_x^2 = \sum_{j=1}^M \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^j \cdot \sum_i \sigma_{j,i}^2 \right\} + \left(\frac{1}{4} \right)^M \sigma_s^2 + 0,083, \quad (2)$$

where M - is a number of decomposition stage, j - is decomposition stage, $i = \{h, v, d\}$ - is a band, σ_s^2 - is a power of noise in the scale.

Table 3 gives the results for various images (wavelet is Daub 16, one stage of two dimensional decomposition with quantization step-size 0,7).

Table 3.

Image	Calculated σ_x^2	Measured σ_x^2
«Wood»	0,25	0,23
«Island»	0,41	0,48
«Mountains»	0,24	0,23

With help of (2) can be obtained algorithms for quantization of wavelet coefficients with different quantization step-size [3] in different bands of transform.

BIBLIOGRAPHY

1. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
2. L. D. Davisson, "Rate-Distortion Theory and Application", Proceedings of the IEEE, pp. 156-164, July 1972.
3. Ganin A.N. Model of quantization of wavelet coefficients // Proc. Of 4nd Int. Conf. "Digital Signal Processing and Its Anlications" (DSPA'2002), Moscow, 2002. V.2, p.242.

* Work is supported by Russian Foundation of Fundamental Research and Ministry of Education of Russian Federation