СЛЕПАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КАНАЛА СВЯЗИ, ОСНОВАННАЯ НА СВОЙСТВАХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Горячкин О. В.

Поволжская государственная академия информатики, радиотехники и связи,
443010, г. Самара, ул. Л. Толстого 23, тел. (8462) 391143, E-mail: gor@mail.radiant.ru

В последние годы проявляется большой интерес к решению задачи слепой идентификации импульсной характеристики канала связи, особенно в тех случаях, когда использование испытательных сигналов невозможно или нежелательно. Например, в многоточечных сетях TDMA постоянная передача испытательной последовательности существенно снижает эффективность использования полосы канала, а использование тренировочной сессии неэффективно в многопользовательской системе [1,2].

Возможность решения задачи идентификации канала связи только по отсчетам информационной последовательности возможно при соблюдении условий идентифицируемости канала, которые накладываются как на импульсную характеристику канала так и на информационную последовательность [3].

В настоящее время развиваются два основных подхода к решению этой задачи [3] – статистический и детерминированный. Не вдаваясь в детали можно сказать, что в рамках статистического подхода идентифицируемость одномерного канала (SISO - один вход один выход) возможна для нестационарных или негауссовых моделей описывающих информационную последовательность [4,5], детерминированный подход обеспечивает идентифицируемость как правило многомерного канала (SIMO – один вход и множественный выход) [3].

В данном докладе развиваются методы слепой идентификации, основанные на нестационарной модели SISO канала и в частности тот ее случай, когда конечна не только импульсная характеристика канала, но и информационная последовательность.

Как было показано в [6] в этом случае весьма эффективным оказывается полиномиальное представление моментов случайных последовательностей. Дискретно-временная модель канала связи в рамках полиномиального представления может быть представлена в виде произведения полиномов одной переменной *z* над полем комплексных чисел, образованных соответствующими дискретными отсчетами шума, информационной последовательности и принятого сигнала.

$$
\begin{aligned}
&Y(z)=H(z)\cdot X(z)+N(z)\\
&Y(z)=\sum_{i=1}^{N+L-1}\dot{y}(i)z^i, \qquad H(z)=\sum_{i=1}^{L}\dot{h}(i)z^i,\\
&X(z)=\sum_{i=1}^{N}\dot{x}(i)z^i, \qquad N(z)=\sum_{i=1}^{N+L-1}\dot{n}(i)z^i
\end{aligned}
\tag{1}
$$

В этом выражении $\dot{y}(i)$ - дискретизированный сигнал в приемнике, $\dot{h}(i)$ – дискретная импульсная характеристика канала, $\dot{x}(i)$ – информационная последовательность на входе канала, $\dot{n}(i)$ – отсчеты белого гауссовского шума, L – память (порядок) канала, N – длина информационной последовательности.

Задача слепой идентификации означает оценку импульсной характеристики канала по семейству наблюдаемых реализаций $\dot{y}(i)$, $i=0\ldots N+L-1$ образованных семейством реализаций последовательностей информационных отсчетов $\dot{x}(i)$, $i=0\ldots N$ передаваемых по каналу связи с использованием защитной паузы длины $>L$.

Будем называть полиномиальным моментом порядка $k=k_1+k_2+\ldots+k_R$ последовательности случайных величин $\dot{x}(i)$ полином R переменных $z_1,z_2,\ldots,z_R$ над полем комплексных чисел сформированный следующим образом:

$$P^x_{k_1,k_2,\ldots,k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)=\mathbf{M}\left\{x(z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot x(z_R)^{k_R}\right\} \tag{2}$$

Уравнение, связывающее полиномиальные моменты на входе и выходе идентифицируемой системы можно записать в следующем виде:

$$P^y_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)-P^N_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)=H(z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot H(z_R)^{k_R}\cdot P^x_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R) \tag{3}$$

Для систем связи статистика передаваемого сообщения и аддитивного шума часто известна получателю. В этом случаю алгоритм идентификации предполагает оценку полиномиального момента наблюдаемого семейства реализаций $\dot{y}(i)$, затем деление полинома левой части уравнения (3) на априори известный полиномиальный момент информационной последовательности. Единственным условием потенциальной идентифицируемости канала является конечность информационной последовательности и системной функции канала.

Однако часто статистика информационной последовательности недоступна. В этом случае возможность однозначной идентификации канала следует из однозначности разложения полинома в левой части (6) на неприводимые множители с одной стороны, или, по крайней мере, отсутствия делителей меньше чем второго порядка у полиномиального момента информационной последовательности с другой. Однако факторизация полиномов от нескольких переменных над полем комплексных чисел хотя и разрешимая, но алгоритмически крайне трудная задача [7].

Более простую технику можно предложить для практически важного случая независимых отсчетов информационной последовательности, имеющих нулевое математическое ожидание и произвольное распределение. При этом полиномиальные моменты информационной последовательности имеют вид:

$$P^{x}_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)=\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^{k_1+k_2+\ldots+k_R}\cdot(z_1^{k_1}z_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot z_R^{k_R})^i \qquad (4)$$

где $\alpha_i^{k_1+k_2+\ldots+k_R}$ - момент $k_1+k_2+\ldots+k_R$ порядка i-го отсчета информационной последовательности.

Рассмотрим возможности идентификации канала по симметричным полиномиальным моментам порядка R. Уравнение (3) в этом случае можно записать в виде:

$$\mathrm{P_{y\text{-}N}}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\ldots,\mathrm{z}_R)=H(z_1)\cdot\ldots\cdot H(z_R)\cdot P_x(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2,\ldots,\mathrm{z}_R) \qquad (5)$$

Полиномы в левой и правой части этого уравнения не изменяются при любой перестановке переменных $z_1,z_2,\ldots,z_R$. В соответствии с основной теоремой о симметричных полиномах любой симметричный полином $f(z_1,z_2,\ldots,z_R)$ может быть единственным образом представлен в виде полинома g от элементарных симметрических функций $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_R$, задаваемых следующими выражениями:

$$\sigma_1=z_1+z_2+\ldots+z_R;\ldots;\sigma_r=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r}z_{i_1}\cdot z_{i_2}\cdot\ldots\cdot z_{i_r};\ldots;\sigma_R=z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_R \qquad (6)$$

Используя данное представление, формулы Вьета и (4) уравнение (3) можно записать в виде:

$$g_{y\text{-}N}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_R)=\prod_{i=1}^{L}\left(c_i^R-c_i^{R-1}\sigma_1+\ldots+(-1)^R\sigma_R\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^R\cdot(\sigma_R)^i\right) \qquad (7)$$

где: $\{c_k\}_{k=1,L}$ – L корней полинома $H(z)$. Очевидно, что полиномы в правой части (7) не имеют общих делителей, что эквивалентно однозначной (с точностью до комплексного множителя) идентифицируемости канала.

Как и ранее в случае априори известного набора $\{\alpha_i^R\}$ моментов входной последовательности для идентификации канала достаточно поделить полином $g_{y\text{-}N}$ на g_x. Однако уравнение (7) разрешимо и в случае неизвестных моментов информационной последовательности. Для этого нам достаточно выбрать фиксированное значение переменной σ_R не равным нулю одномерного полинома информационной последовательности. В частности для стационарной информационной последовательности достаточно выбрать σ_R так, чтобы $|\sigma_R|\neq 1$. Получившийся полином от переменных $\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_{R-1}\}$ определен коэффициентами, зависящими только от корней системной функции, для которых мы можем записать соответствующую систему полиномиальных уравнений.

Для полиномиального момента произвольного порядка процедура нахождения разложения (7) может быть построена на использовании свойств базиса Грёбнера полиномиального идеала [7].

Рассмотрим алгоритм полиномиальной идентификации для наиболее простого и одновременно наиболее важного с практической точки зрения двумерного случая $R=2$.

Пусть $\{a_{ij}\}$ коэффициенты полинома $\mathrm{P_{y\text{-}N}}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)$. Используя формулы Ньютона разложение по симметричным функциям может быть получено в виде:

$$g_y(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{l=0}^{N+L-1}S_l(\sigma_1,\sigma_2)\cdot\sum_{i=0}^{N+L-1-l}a_{i,i+l}\sigma_2^i \qquad (8)$$

где $\{S_l(\sigma_1,\sigma_2)\}$- последовательность *S*-полиномов, задаваемая следующими выражениями:

$$
\begin{aligned}
&S_0(\sigma_1,\sigma_2)=1,\\
&S_1(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1,\\
&S_2(\sigma_1,\sigma_2)=\sigma_1^{\,2}-2\sigma_2,\\
&\qquad\ldots\\
&S_k(\sigma_1,\sigma_2)=S_{k-1}(\sigma_1,\sigma_2)\cdot\sigma_1-S_{k-2}(\sigma_1,\sigma_2)\cdot\sigma_2,\quad k>2,\quad k\le N+L\text{-}1
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Разложение (3) можно записать в виде:

$$g_y(\sigma_1,\sigma_2)=\prod_{i=1}^{L}\left(c_i^2-c_i\,\sigma_1+\sigma_2\right)\cdot g_x(\sigma_2) \tag{10}$$

Можно показать, что уравнение (10) однозначно разрешимо в случае если $2L>N$. Можно предложить несколько способов решения уравнения (10) относительно неизвестных корней $\{c_k\}_{k=1,L}$ полагая $\sigma_2=\lambda$, так что $g_x(\lambda)\neq 0$. В частности, если $\lambda=0$, то полином $g_y(\sigma_1,0)=H(\sigma_1)\cdot const$ в остальных случаях решение уравнения (10) дает следующее выражение:

$$c_i=\left(\left.\frac{d\mu_i(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}\right)^{-1} \tag{11}$$

где: $\{\mu_i(\lambda)\}$ - L корней полинома $g_y(\sigma_1,\lambda)$.

Литература

1. J.T. Tugnait, L. Tong, Z. Ding, Single-user channel estimation and equalization. // IEEE Signal Processing Magazine, May 2000, pp.17-28.
2. Прокис Дж. Цифровая связь. Пер с англ. / под ред. Д.Д. Кловского. – М. Радио и связь. 2000. – 800с.
3. L.Tong, and S. Perreau, “Multichannel blind identification: From subspace to maximum likelihood methods,” in Proceedings of IEEE, vol. 86, No. 10, Oct. 1998, pp.1951-1968.
4. Никиас Х.Л., Рагувер М.Р. Биспектральное оценивание применительно к цифровой обработке сигналов.// ТИИЭР, 1987,т.75, №7, с.5-30.
5. Горячкин О.В., Кловский Д.Д. Идентификация неизвестной передаточной функции канала связи на основе нестационарной модуляции информационной последовательности на передаче// В трудах секции теории связи и обработки сигналов международной конференции по телекоммуникациям (IEEE/ICC2001/St.Petersburg), СПБ, 11-15 июня 2001г., 6-11стр.
6. Горячкин О.В. Использование полиномиального представления в задаче слепой статистической идентификации канала связи. // В сборнике докладов 57-й научной сессии РНТОРЭС им. А.С.Попова - г. Москва, 2002, 3с.
7. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Пер. с англ. / под ред. В.Л. Попова. – М.: Мир, 2000г.-687с.

BLIND IDENTIFICATION OF TELECOMMUNICATION CHANNEL BASED ON SOME PROPERTIES OF POLYNOMIAL MOMENTS OF RANDOM SEQUENCES

Goriachkin O.

Volga State Academy of Telecommunication and Informatic (PGATI),
23 L. Tolstoy str., Samara 443010, Russia,
Tel.: (8462) 391143, E-mail: gor@mail.radiant.ru

In last years the large interest to a solution of the problem of blind identification of telecommunication channels, especially when the use of test signals is impossible or it is undesirable. For example, in multipoint nets TDMA a constant the transmission of a test sequence essentially reduces effectiveness of use of a band of the channel, and the use training session is ineffective in a multi-user system.

In the paper the methods of blind identification based on the non-stationary SISO model of the channel and in particular that it case develop when is finite not only impulse performance of the channel, but also information sequence. In this case rather effective there is polynomial a representation of moment of random sequences.

Let's name a polynomial moment of the order $k=k_1+k_2+\ldots+k_R$ of random sequences $\dot{x}(i)$ a polynomial of R variables $z_1,z_2,\ldots,z_R$ above of complex numbers field generated as follows:

$$P^x{}_{k_1,k_2,\ldots,k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)=\mathbf{M}\left\{x(z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot x(z_R)^{k_R}\right\} \quad (1)$$

The equation connecting polynomial moment on the input and an exit of an identified system is possible to note as follows:

$$P^y_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)-P^N_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R)=H(z_1)^{k_1}\cdot\ldots\cdot H(z_R)^{k_R}\cdot P^x_{k_1,k_2,\ldots k_R}(z_1,z_2,\ldots,z_R) \quad (2)$$

For telecommunication systems the receiver frequently knows the statistician of the transmitted messages and additive noises. In it to case the algorithm of identification assumes an evaluation polynomial of a moment of an observable set of realizations $\dot{y}(i)$, then division of the polynomial of the left part of the equation (2) on priory the known polynomial moment of an information sequence. However frequently statistics of the information sequence is inaccessible. In this case possibility of unambiguous identification of the channel follows from a uniqueness of expansion of the polynomial in the left part (2) on irreducible factors on the one hand, or, at least, the lacks of dividers are less than second order at polynomial moment of the information sequence with another. The more simples technique can be offered for practically important case of independent information samples having zero mean and any distribution. Let's consider possibilities of identification of the channel on symmetrical polynomial moments. Equation (2) in this case is possible to write via symmetric functions as:

$$g_{y\text{-}N}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_R)=\prod_{i=1}^{L}\left(c_i^R-c_i^{R-1}\sigma_1+\ldots+(-1)^R\sigma_R\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i^R\cdot(\sigma_R)^i\right) \quad (3)$$

Let's consider algorithm polynomial identifications for case $R=2$. Let $\{a_{ij}\}$ - factors of the polynomial $\mathrm{P}_{\mathrm{y\text{-}N}}(\mathrm{z}_1,\mathrm{z}_2)$. Using of a Newton's formula expansion on symmetrical functions can be obtained as:

$$g_y(\sigma_1,\sigma_2)=\sum_{l=0}^{N+L-1}S_l(\sigma_1,\sigma_2)\cdot\sum_{i=0}^{N+L-1-l}a_{i,i+l}\sigma_2^i \quad (4)$$

where $\{S_l(\sigma_1,\sigma_2)\}$- sequence of S-polynomials. It is possible to show, that the equation (3) is unequivocally solvable in case if $2L>N$. The solution of the equation (3) gives the following expression:

$$c_i=\left(\left.\frac{d\mu_i(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_0}\right)^{-1} \quad (5)$$

where: $\{\mu_i(\lambda)\}$ are L roots of polynomials $g_y(\sigma_1,\lambda)$.