КОДИРОВАНИЕ ДИСТРИБУТИВНОЙ РЕШЕТКИ МИНИМАЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

Гришкевич А.А.

Южно-Уральский государственный университет
т. 8-3512-67-94-65, E-mail: grishkev@math.tu-chel.ac.ru; aag@susu.ac.ru

Нахождение всех минимальных разрезов, разделяющих заданные вершины в графе, является важным этапом в определении вероятностных характеристик связности сетей связи различного назначения (распределенных вычислительных и информационных сетей, сетей электро-, газо-, нефте-, водоснабжения, и т.п.).

Пусть $\mathrm{G(V,\ U)}$ – ориентированный граф, где $\mathrm{V}=\{v\}$ – множество вершин графа ($s \neq t \in \mathrm{V}$), $\mathrm{U}=\{u=(i,\ j)\ :\ i,\ j\in \mathrm{V}\}$ – множество ориентированных дуг графа, $\varepsilon(A,\ B)=\{(i,\ j)\ :\ (i,\ j)\in \mathrm{U},\ i\in A,\ j\in B\}$ – множество дуг, ведущих из $i\in A$ в $j\in B$. Разрезом, разделяющим вершины $s,\ t$ графа $\mathrm{G(V,U)}$, называется множество дуг $r=\varepsilon(R,\ \overline{R})\subseteq \mathrm{U}$, где $R\bigcap \overline{R}=\varnothing$, $R\bigcup \overline{R}=\mathrm{V}$, $s\in R$, $t\in \overline{R}$. Множество таких разрезов обозначим посредством R^F. Будем использовать звёздочку для формального различия разреза как множества дуг ($r=\varepsilon(R,\ \overline{R})\in \mathrm{R}^F$) и его обозначения в виде соответствующего разбиения множества вершин ($r^*=(R,\ \overline{R})$). В множестве разрезов R^F графа G может быть выделено подмножество разрезов минимального веса $\mathrm{M}^F = \{\ m\ :\ m=\arg\min\limits_{r\in \mathrm{R}^F}\ c(r)\ \}$, где $c\ :\ \mathrm{U}\ \to \mathrm{R}^+$, $c(r)\ =\ c(R,\ \overline{R})\ =\ \sum\limits_{u\in\varepsilon(R,\ \overline{R})} c(u)$.

В [1,2,3] установлено, что множество минимальных реберных разрезов M^F ориентированного графа G, разделяющих две заданные вершины s,t, может рассматриваться как дистрибутивная решетка $\langle \mathrm{M}^F;\vee,\wedge\rangle$, т.е. множество $\mathrm{M}^F=\{m_i^*=(M_i,\ \overline{M_i})\}$ с двумя бинарными операциями $\vee,\wedge$:

$$m_3=m_1\vee m_2,\ m_4=m_1\wedge m_2,\ \text{где}\ M_3=M_1\bigcup M_2,\ M_4=M_1\bigcap M_2, \qquad (1)$$

которые удовлетворяют тождествам коммутативности, ассоциативности, поглощения и дистрибутивности. На основе указанного свойства построены алгоритмы [2,4,5] нахождения минимальных разрезов графа M^F, которые основаны на поиске в графе только неприводимых минимальных разрезов $\mathrm{P}^F\subseteq \mathrm{M}^F$, и синтезе множества разрезов $\mathrm{M}^F\setminus \mathrm{P}^F$ в дистрибутивной решетке минимальных разрезов по подмножеству неприводимых разрезов P^F на основе операций $\vee,\wedge$. Однако алгоритмическая реализация операций $\vee,\wedge$ в решетке M^F, основанная на непосредственном определении операций $\vee,\wedge$ (1), весьма сложна (трудоемка). Поэтому рассмотрим кодирование решетки M^F с целью получения более удобной алгоритмической реализации операций $\vee,\wedge$ на множестве M^F.

Обозначим $\mathrm{N}_j=\{z_{j1}<z_{j2}<\ \dots\ <z_{j,n_j-1}\}$, $z_{ji}\in \mathrm{N}$, $j=1,2,\ \dots\ ,l$, $i=1,2,\ \dots\ ,n_j-1$, линейно упорядоченные множества, $Q=\prod\limits_{j=1}^{l}\mathrm{N}_j$ декартово произведение упорядоченных множеств N_j.

Решеткой произведения цепей называется решетка $\langle Q;\min,\max\rangle$ [6,7], в которой $\forall \widehat{q}_1,\widehat{q}_2\in Q$ ($\widehat{q}_i=(q_{1i},q_{2i},\ \dots\ ,q_{li})$, $q_{ji}\in \mathrm{N}_j$, $i=1,2$, $j=1,2,\ \dots\ ,l$) операции $\min,\max$ задаются

$$\min\{\widehat{q}_1,\widehat{q}_2\}=(\min\{q_{11},q_{12}\},\min\{q_{21},q_{22}\},\dots,\min\{q_{l1},q_{l2}\}),$$

$$\max\{\widehat{q}_1,\widehat{q}_2\}=(\max\{q_{11},q_{12}\},\max\{q_{21},q_{22}\},\dots,\max\{q_{l1},q_{l2}\}).$$

Ясно, что отношение частичного порядка в решетке Q описывается следующим образом: $\widehat{q}_1 \le \widehat{q}_2 \Leftrightarrow q_{j1} \le q_{j2}$ для всех $j = 1, 2, \ \ldots \ , l$; $\widehat{q}_1 \ge \widehat{q}_2 \Leftrightarrow q_{j1} \ge q_{j2}$ для всех $j = 1, 2, \ \ldots \ , l$; $\widehat{q}_1 \parallel \widehat{q}_2 \Leftrightarrow \exists i \ne j$ такие что $q_{i1} < q_{i2}$ и $q_{j1} > q_{j2}$ или $q_{i1} > q_{i2}$ и $q_{j1} < q_{j2}$.

Множество W называется подрешеткой решетки Q [7], если $W \subseteq \mathrm{Q}$, и $\forall \widehat{q}_1, \widehat{q}_2 \in W \Rightarrow \max\{\widehat{q}_1, \widehat{q}_2\} \in W$, $\min\{\widehat{q}_1, \widehat{q}_2\} \in W$. Известно [7], что, во-первых, каждая подрешетка произведения цепей дистрибутивна, и, во-вторых, любая дистрибутивная решетка изоморфна некоторой подрешетке произведения цепей.

Кодированием решетки M^F [7] называется изоморфизм $\psi : \mathrm{M}^F \to \langle W; \min, \max \rangle$. Ясно, что для получения изоморфизма ψ достаточно установить изоморфизм неприводимых элементов решеток M и W.

Пусть $f : \mathrm{U} \to \mathrm{R}^+$ – максимальный поток из источника s в сток t, $\mathrm{C} = \{\mathrm{C}_j = (\mathrm{A}_j, \mathrm{E}_j) : j = 1, 2, \ \ldots, l\}$, где $\mathrm{A}_j = \{a_{jk} : k = 1, 2, \ \ldots \ , n_j\} \subseteq \mathrm{V}$, $\mathrm{E}_j = \{e_{jk} = (a_{jk}, a_{jk+1}) : k = 1, 2, \ \ldots \ , n_j - 1\} \subseteq \mathrm{U}$, – цепное разложение потока f [8].

Для $\forall m_i \in \mathrm{M}^F$ возможно представление $m_i = \{e_{jq_{ji}} : j = 1, 2, \ \ldots \ , l\}$ [2,3], где дуга $e_{jq_{ji}} = \mathrm{E}_j \bigcap \varepsilon(M_i, \overline{M_i})$ есть общая дуга разреза m_i и цепи $\mathrm{C}_j(\mathrm{A}_j, \mathrm{E}_j)$, q_{ji} – порядковый номер этой дуги ($e_{jq_{ji}} \in m_i$) в цепи C_j. Этот номер и используем при установлении изоморфизма ψ.

Для $m_i \in \mathrm{M}^F$ зададим $\psi(m_i) = (q_{1i}, q_{2i}, \ \ldots \ , q_{li}) = \widehat{q}_i$. Понятно, что по представлению (коду) разреза может быть восстановлен и сам разрез $\psi^{-1}(\widehat{q}_i) = m_i$.

Пример (кодирование решетки двухэлементных разрезов). Множество двухэлементных разрезов графа, представленного на рис. 1, есть d_1 = {(1, 3), (1, 2)}, d_2 = {(3, 6), (1, 2)}, d_3 = {(6, 7), (1, 2)}, d_4 = {(7, 8), (1, 2)}, d_5 = {(1, 3), (2, 4)}, d_6 = {(3, 6), (2, 4)}, d_7 = {(6, 7), (2, 4)}, d_8 = {(7, 8), (2, 4)}, d_9 = {(6, 7), (4, 8)}, d_{10} = {(7, 8), (4, 8)}.

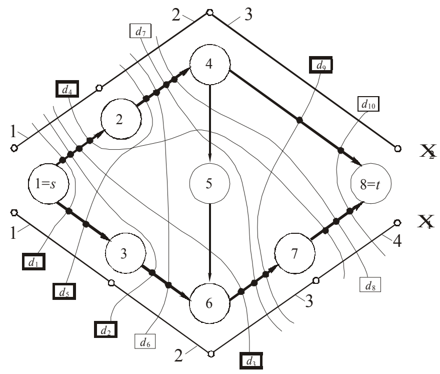

Рис. 1. Множество минимальных разрезов M^F

Положим $f(u) = 1 \ \forall u \in \mathrm{U}$. Тогда $\mathrm{C} = \{\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2\}$, где $\mathrm{A}_1 = \{1, 3, 6, 7, 8\}$, $\mathrm{E}_1 = \{(1,3), (3,6), (6,7), (7,8)\}$, $\mathrm{A}_2 = \{1, 2, 4, 8\}$, $\mathrm{E}_2 = \{(1,2), (2,4), (4,8)\}$. Здесь $\mathrm{A}_1 = \{a_{1k} : k = 1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{E}_1 = \{e_{1k} : k = 1,2,3,4\}$, $\mathrm{A}_2 = \{a_{2k} : k = 1,2,3,4\}$, $\mathrm{E}_2 = \{e_{2k} : k = 1,2,3\}$, a_{11}=1, a_{12}=3, a_{13}=6, a_{14}=7, a_{15}=8, e_{11}=(1, 3), e_{12}=(3, 6), e_{13}=(6, 7), e_{14}=(7, 8), a_{21}=1, a_{22}=2, a_{23}=4, a_{24}=8, e_{21}=(1, 2), e_{22}=(2, 4), e_{23}=(4, 8).

В этом случае $\mathrm{N}_1 = \{1 < 2 < 3 < 4\}$, $\mathrm{N}_2 = \{1 < 2 < 3\}$ (перенумерацией всегда можно добиться, чтобы множества N_j всегда являлись последовательными отрезками натурального ряда без пропусков, т.е. $\{1 < 2 < \ \ldots \ < k_j\}$). Заметим, что дополнительно может быть рассмотрена биекция $\tau : z_{jk} \to e_{jk}$, где $z_{jk} \in \mathrm{N}_j$, $e_{jk} \in \mathrm{E}_j \subseteq \mathrm{U}$, $j = 1, 2$, $k = 1, 2, \ldots, n_j - 1$. Так, для цепей N_1, N_2 имеем N_1: $\tau(1) = (1,3)$, $\tau(2) = (3,6)$, $\tau(3) = (6,7)$, $\tau(4) = (7,8)$; N_2: $\tau(1) = (1,2)$,

$\tau(2) = (2,4)$, $\tau(3) = (4,8)$. Указанная биекция полезна при переходе от элементов решетки W к элементам решетки M^F.

Ясно, что, например, $d_9 = \{e_{1q_{19}}, e_{2q_{29}}\} = \{e_{13}, e_{23}\}$, т.е. $q_{19} = 3$, $q_{29} = 3$. Следовательно $\psi(d_9) = \widehat{q}_9 = (q_{19}, q_{29}) = (3,3)$. Аналогично $\psi(d_1) = \widehat{q}_1 = (1,1)$, $\psi(d_2) = \widehat{q}_2 = (2,1)$, $\psi(d_3) = \widehat{q}_3 = (3,1)$,

$\psi(d_4) = \widehat{q}_4 = (4,1)$,

$\psi(d_5) = \widehat{q}_5 = (1,2)$, $\psi(d_6) = \widehat{q}_6 = (2,2)$, $\psi(d_7) = \widehat{q}_7 = (3,2)$, $\psi(d_8) = \widehat{q}_8 = (4,2)$,

$\psi(d_{10}) = \widehat{q}_{10} = (4,3)$.

Т.к. $\max\{\widehat{q}_2, \widehat{q}_5\} = (\max\{2,1\}, \max\{1,2\}) = (2,2) = \widehat{q}$, $\psi^{-1}(\widehat{q}) = \{\tau(2), \tau(2)\} = \{(3,6),(2,4)\} = d_6$, то $d_2 \vee d_5 = d_6$. Это подтверждает простоту и наглядность реализации операций $\vee, \wedge$ над разрезами в решетке W.

Кодирование соответствует переходу от представления решетки $\langle \mathrm{M}^F; \vee, \wedge \rangle$ рис. 2 к представлению рис. 3. Неприводимые разрезы на рис. 1-3 выделены утолщенной линией.

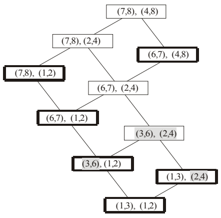

Рис. 2. Дистрибутивная решетка минимальных разрезов

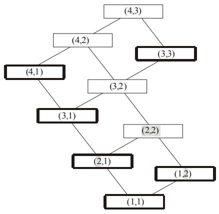

Рис. 3. Кодирование дистрибутивной решетки минимальных разрезов

Работа поддержана грантами РФФИ"Урал" 01-01-96401 и губернаторского конкурса Челябинской области р2001урчел-01-04.

Источники информации

1. Бутырин П.А., Гришкевич А.А. Использование дистрибутивных решеток при оценке топологии сетевых систем // Одиннадцатый Всесоюзный семинар по вычислительным сетям: Тез. докл. – М.: 1986. – Ч. 1. – С. 33-38.
2. Бутырин П.А., Гришкевич А.А. Минимальные структуры математических моделей электрических цепей // Электричество. – 1992. – № 2. – С. 1-8.
3. Гришкевич А.А. Дистрибутивная решетка минимальных разрезов ориентированного графа // Труды XII Байкальской международной конференции. – Иркутск: Иркутский государственный ун-т, 2001. – Т. 5. – С. 43-48.
4. Гришкевич А.А. Комбинаторный метод оценки надежности сложных электрических цепей // Электричество. – 2000. – № 8. – С. 53-61.
5. Гришкевич А.А. Нахождение минимальных трехэлементных разрезов графа // Распределенные системы: оптимизация и приложения в экономике и науках об окружающей среде. Сборник докладов к Международной конференции. – Екатеринбург: УрО РАН, 2000. – С. 123-126.
6. Оре 0. Теория графов. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
7. Айгнер М. Комбинаторная теория. – М.: Мир, 1982. – 558 с.
8. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.

CODING OF MINIMAL GRAPH CUTSETS DISTRIBUTIVE LATTICE

Grishkevich A.

The Southern Ural State University
Russia, Chelyabinsk, E-mail: grishkev@math.tu-chel.ac.ru; aag@susu.ac.ru

Finding of all minimal cutsets parting given vertexes of a graph is the important stage in definition of connectivity probability characteristics of various purpose communication networks (distributed computing and information networks, networks electro-, gas-, oil-, water supply, etc.).

Earlier it had been set that set of minimal edge cutsets $\mathrm{M}^F = \{m_i\}$ of directed graph $\mathrm{G(V,\ U)}$, parting two given vertexes $s, t \in \mathrm{V}$, can be considered as distributive lattice $\langle \mathrm{M}^F;\ \vee,\ \wedge \rangle$, i.e. set M^F with two binary operations $\vee, \wedge$ that satisfy to identities of commutativities, associativities, absorption and distributivities. On the basis of the specified property algorithms of finding the minimal cutsets of a column which are based on search in graph only not resulted minimal cutsets $\mathrm{P}^F \subseteq \mathrm{M}^F$, and synthesis of cutsets set $\mathrm{M}^F \setminus \mathrm{P}^F$ in a distributive lattice of minimal cutsets on subset of not resulted cutsets P^F are constructed on the basis of operations $\vee, \wedge$. However algorithmic realization of operations $\vee,\ \wedge$ in lattice M^F, based on direct definition of operations $\vee,\ \wedge$, is rather difficult. Therefore we shall consider coding lattice M^F with the purpose of more convenient algorithmic realization of operations $\vee,\ \wedge$ on set M^F reception.

Let's designate $\mathrm{N}_j = \{z_{j1} < z_{j2} < \ \ldots\ < z_{j,n_j-1}\}$, $z_{ji} \in \mathrm{N}$, $j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ l$, $i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n_j - 1$ linearly ordered sets, $Q = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{N}_j$ as Cartesian product of the ordered sets N_j.

Let lattice of circuits production be lattice $\langle Q;\ \min,\ \max \rangle$ in which $\forall \hat{q}_1,\ \hat{q}_2 \in Q$ ($\hat{q}_i = (q_{1i},\ q_{2i},\ \ldots\ ,\ q_{li})$ $q_{ji} \in \mathrm{N}_j$ $i = 1,\ 2$, $j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ l$) operations $\min,\ \max$ are set as

$$\min\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\} = (\min\{q_{11}, q_{12}\}, \min\{q_{21}, q_{22}\}, \ldots, \min\{q_{l1}, q_{l2}\}),$$

$$\max\{\hat{q}_1, \hat{q}_2\} = (\max\{q_{11}, q_{12}\}, \max\{q_{21}, q_{22}\}, \ldots, \max\{q_{l1}, q_{l2}\}).$$

Set W we call sublattice of lattice Q, if $W \subseteq \mathrm{Q}$, and $\forall \hat{q}_1,\ \hat{q}_2\ \in\ W\ \Rightarrow\ \max\ \{\hat{q}_1,\ \hat{q}_2\} \in W$, $\min\ \{\hat{q}_1,\ \hat{q}_2\} \in W$. Isomorphism $\psi\ :\ \mathrm{M}^F\ \to \langle W;\ \min,\ \max \rangle$ is called as coding of lattice M^F. Clearly, that for reception of isomorphism ψ it is enough to establish isomorphism of lattices M and W not resulted elements.

Let $f\ :\ \mathrm{U} \to \mathrm{R}^+$ be the maximal stream from a source s to sink t, $\mathrm{C}\ =\ \{\ \mathrm{C}_j = (\mathrm{A}_j,\ \mathrm{E}_j)\ :\ j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ l\ \}$, where

$$\mathrm{A}_j\ =\ \{\ a_{jk}\ :\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n_j\ \}\ \subseteq\ \mathrm{V},$$

$$\mathrm{E}_j\ =\ \{\ e_{jk} = (a_{jk},\ a_{jk+1})\ :\ k = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n_j - 1\ \}\ \subseteq\ \mathrm{U}$$

is chain decomposition of stream f.

For $\forall m_i \in \mathrm{M}^F$ representation $m_i = \{e_{jq_{ji}} : j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ l\}$ is possible. There arch $e_{jq_{ji}}$ is common arch of cutset m_i and circuit $\mathrm{C}_j(\mathrm{A}_j,\ \mathrm{E}_j)$, q_{ji} is ordinal number of this arch ($e_{jq_{ji}} \in m_i$) in circuit C_j. This number is also used at process of isomorphism ψ establishment.

For $m_i \in \mathrm{M}^F$ we shall set $\psi(m_i) = (q_{1i},\ q_{2i},\ \ldots\ ,\ q_{li}) = \hat{q}_i$.

This research was supported by RFBR "Ural" grant 01-01-96401 and Chelyabinsk region Governor's Contest p2001урчел-01-04.