АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ПРОИЗВОДНЫХ В АЛГОРИТМАХ РЕКОНСТРУКЦИИ

Кузнецов А.В., Булдакова Т.И.

Саратовский государственный технический университет

Существуют разные способы построения моделей динамических систем (ДС). Большинство из них оперируют либо с информацией о физических процессах, протекающих в системах, либо с данными о выходных реакциях систем на заданные входные воздействия.

Наиболее сложным является случай, когда информация о входных воздействиях отсутствует или недоступна, и нет возможности достаточно полно и точно математически описать физические процессы в системе. В этом случае говорят о реконструкции системы по наблюдаемой временной реализации.

В настоящее время алгоритмы реконструкции интенсивно разрабатываются в рамках нелинейной динамики [1]. Они используют разные способы восстановления фазового пространства системы. Например, для большинства физических систем, которые описываются дифференциальными уравнениями, в качестве вектора состояния удобнее брать совокупность производных исходного сигнала.

Тогда модель системы можно представить в виде дифференциального уравнения *m*-й степени:

$$x^{(m)} - f\left(x^{(m-1)}, \ldots, \ddot{x}, \dot{x}, x\right) = 0, \qquad (2)$$

где *f*(*X*) – некоторая нелинейная функция, $X = \left(x^{(m-1)}, \ldots, \ddot{x}, \dot{x}, x\right)$ - вектор фазовых переменных.

Узким местом подобного алгоритма реконструкции является численное дифференцирование сигнала *x*, что особенно проявляется при работе с неоднородными сигналами, в частности, с биосигналами.

Пусть после снятия данных мы располагаем зависимостью вида $y = f(x)$, представленной в виде набора точек (рис. 1).

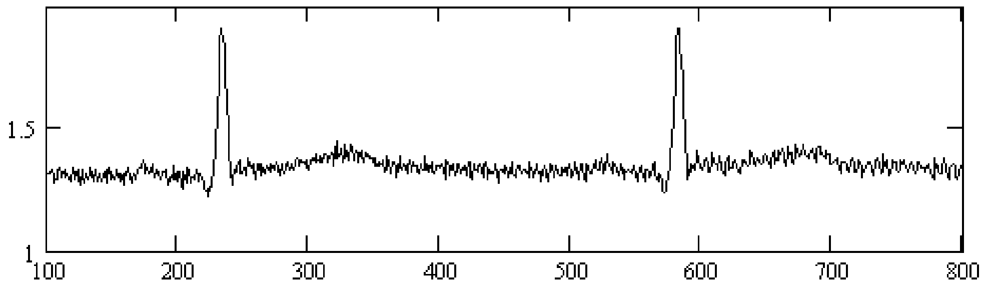

Рис. 1. Пример сигнала

Как правило, для определения недостающих фазовых переменных применяется один из двух методов [2].

1. Последовательное дифференцирование с применением стандартного метода расчета производных.

   В этом случае производные рассчитываются по формулам:

$$y_i^{(n+1)} = (y_{i+1}^{(n)} - y_{i-1}^{(n)})/(2*h)$$
$$y_0^{(n+1)} = (y_1^{(n)} - y_0^{(n)})/h \qquad .$$
$$y_{N-1}^{(n+1)} = (y_{N-1}^{(n)} - y_{N-2}^{(n)})/h$$

При этом методе точность расчетов напрямую зависит от шага h и требует очень большого числа точек в исходном временном ряде. В противном случае точность расчета производных невысокая (рис 2).

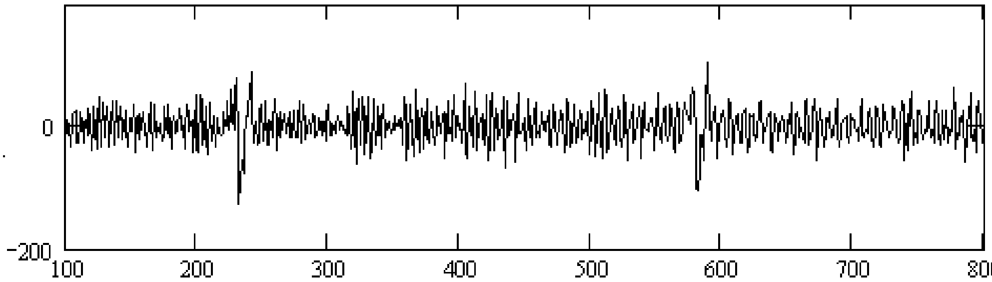

Рис. 2. Вторая производная сигнала, рассчитанная стандартным методом

Как видно из рис. 2, сигнал имеет определенную степень зашумленности.

2. Использование метода последовательного дифференцирования с аппроксимацией полиномами второго или четвертого порядков.

При использовании этих методов в исходном наборе выделяются группы из 3 или 5 соседних точек. После этого каждая группа аппроксимируется функциями вида:

$y = ax^2 + bx + c$ и $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

и производные рассчитываются по формулам:

$y_1' = 2ax + b$ и $y_2' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2dx + e$

соответственно.

Данный метод позволяет более точно рассчитать производные, но является достаточно трудоемким. Кроме того, данные методы расчета малоприменимы в условиях зашумленности сигнала. Полученные значения производных содержат погрешности, возрастающие с увеличением порядка производной и сложности метода расчета (рис. 3 и 4).

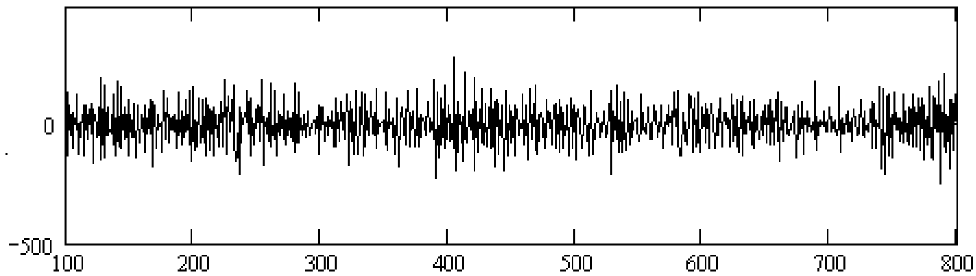

Рис. 3. Вторая производная сигнала, рассчитанная по 3-м точкам

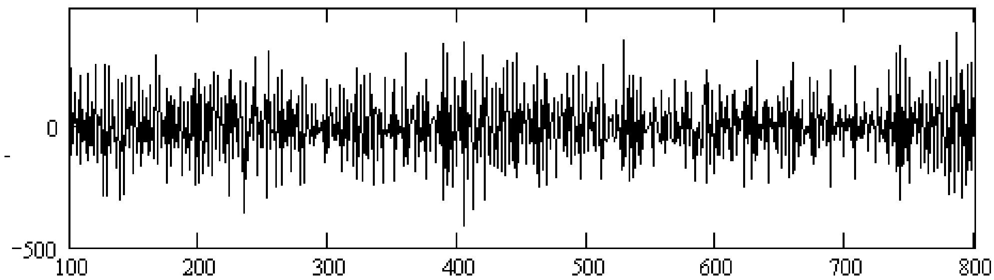

Рис. 4. Вторая производная сигнала, рассчитанная по 5-м точкам

Как легко можно видеть, уже для второй производной полезная составляющая практически полностью подавлена шумами.

Для корректного расчета производных предлагается предварительно сигнал подвергнуть фильтрации. Для этой цели часто прибегают к преобразованию Фурье:

$$f(t_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_k \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi k x_i}{L}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k x_i}{L}\right)\right),$$

где

$$a_k = \frac{2}{L}\sum_i \left(f(x_i)\cos\left(\frac{2\pi k x_i}{L}\right)\right) \text{ и } b_k = \frac{2}{L}\sum_i \left(f(x_i)\sin\left(\frac{2\pi k x_i}{L}\right)\right).$$

В результате фильтрации сигнал получается более гладким (рис. 5), что существенно упрощает процесс аппроксимации.

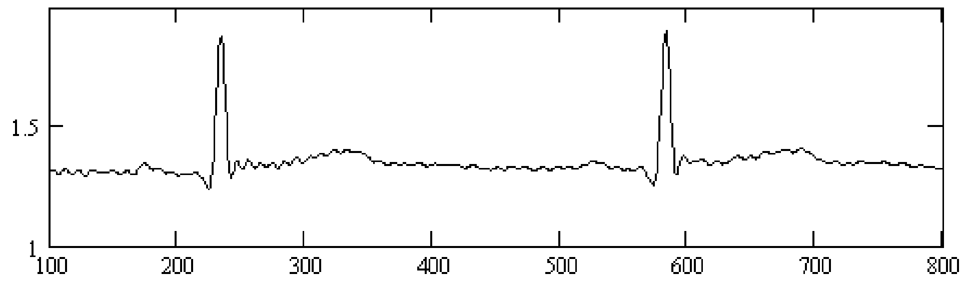

Рис 5. Исходный сигнал после аппроксимации

Отфильтрованный сигнал задается в аналитической форме. Поэтому предлагается для расчета производных использовать следующие формулы:

$$a_k' = \frac{2\pi k b_k}{L} \text{ и } b_k' = -\frac{2\pi k a_k}{L},$$

где a_k' и b_k' – коэффициенты ряда Фурье для производных, L – интервал, на котором происходит рассмотрение графика. Так как при таком расчете производных их коэффициенты или стремительно возрастают, или убывают в зависимости от отношения $\frac{2*\pi*k}{L}$, будем выбирать интервал для изучения графика таким образом, что $2*\pi*k_{\max} \approx L$, где k_{max} – число коэффициентов в ряде разложения (из практических соображений k_{max} выбирается как $0.8\varphi_n$, где φ_n - частота Найквиста). Тогда графики функции и ее производных будут иметь примерно один порядок.

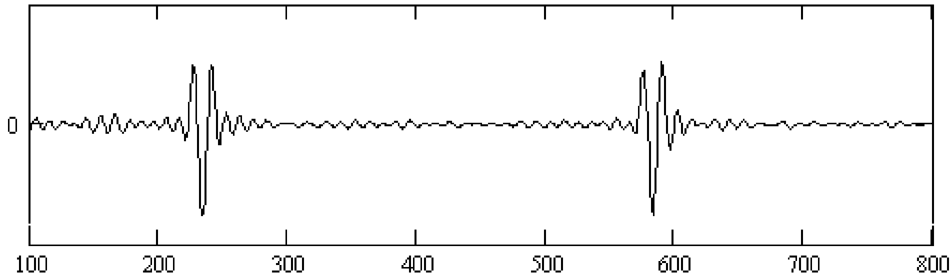

Рис. 6. Результат аналитического расчета второй производной

Как видно из графика (рис. 6), полученные значения производной не содержат шумовой составляющей и не расходятся со значениями, полученными другими способами. Это позволяет говорить о применимости данного способа для определения недостающих фазовых переменных в задачах динамической реконструкции.

Источники информации

1) Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1999.
2) Хованова Н.А., Хованов И.А. Методы анализа временных рядов. – Саратов: Изд-во «Колледж», 2001.

THE ANALYSIS OF METHODS OF CALCULATION OF DERIVATIVES IN ALGORITHMS OF RECONSTRUCTION

Kuznetsov A., Bouldakova T.

There is a problem of primary incompleteness of the initial data at modeling of the complex dynamic systems describing real processes. As a rule, the values only by one of state variables of the system are known. It results in necessity numerically to expect missing parameters.

As a rule, the standard methods of numerical calculation of derivatives of definition of missing phase variables are applied.

However, these methods have a significant error at calculation of signals with noise. It is necessary to apply a filtration to elimination of mistakes. For this purpose one frequently resort to a Furie transform.

$$f(t_i) = \frac{a_0}{2} + \sum_k (a_k \cos(\frac{2\pi k x_i}{L}) + b_k \sin(\frac{2\pi k x_i}{L})),$$

where

$$a_k = \frac{2}{L}\sum_i (f(x_i)\cos(\frac{2\pi k x_i}{L})) \quad b_k = \frac{2}{L}\sum_i (f(x_i)\sin(\frac{2\pi k x_i}{L}))$$

As a result of a filtration the signal turns out more smooth, that essentially simplifies process of approximation.

However, now the signal is set in the analytical form. In this connection it is offered to resort for calculation of derivatives the following formulas:

$$a_k' = \frac{2\pi k b_k}{L} \qquad b_k' = -\frac{2\pi k a_k}{L}$$

Where a_k, and b_k, - factors of some Furie line. As at such calculation of derivatives their factors or promptly grow or decrease depending on the relation $\frac{2*\pi*k}{L}$, we shall choose an interval for studying the schedule in such a manner that $2*\pi*k_{\max} \approx L$, where k_{max} - number of factors in a number of decomposition (of practical reasons k_{max} gets out as $0.8\varphi_n$, where φ_n is the Naikvist frequency). Then schedules of function and its derivatives will have about one order.

Apparently from the schedule, the received values of derivative have not the noise component received in other ways. It allows to speak about applicability of the given method for definition of missing phase variables in the problems of the dynamic reconstruction.