ЛОГИКО-ВЕРОЯТНОСТНАЯ ОЦЕНКА ВЫПОЛНЕНИЯ ПРИНЦИПА СУПЕРПОЗИЦИИ В КВАНТОВОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Арутюнов П.А.

Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет)
109028, Россия, Москва, Б.Трехсвятительский пер.3/12, E-mail:root@onti.miem.msk.su

Элементная база классических и квантовых компьютеров принципиально различна. Логический вентиль для классического компьютера представляет собой *триггер* у которого два устойчивых состояния; одно из них кодируют "1" другое "0". Логический вентиль для квантового компьютера представляет из себя *спин* электрона или атома; его называют кубит **(**quantum bits). Спин у электрона имеет 2s+1 возможных ориентаций относительно выбранного направления. Спин электрона это механический момент, величина которого следует из фактов, известных о спектрах щелочных металлов. Опыт показывает, что спин имеет только две возможные ориентации, т.е. 2s+1 =2, или $s= \pm 1/2$ (в единицах $h/2\pi$) и ведет себя как триггер. Однако, в отличие от классического элемента- триггера, кубит может находится не только в каком-то одном из двух чистых базисных состояний, но и в обоих состояниях *одновременно* $|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, т.е. вектор состояния может представлять собой произвольную *когерентную суперпозицию* базисных состояний. Другими словами, мы изначально имеем дело с вероятностной природой элементов-кубитов квантового компьютера.

Здесь важно отметить метрологические аспекты квантовых вычислений. Благодаря взаимодествию квантовой системы квантового компьютера с "окружением" возникают процессы *разрушения* квантовых когерентных состояний кубитов, которую называют *декогерентностью состояний квантовой системы.* В ходе квантовых вычислений производится воздействие на кубиты, в результате которых они совершают управляемую квантовую эволюцию. При этом образуются различные сложные суперпозиции состояний кубитов. Процессы декогерентности, *разрушая суперпозиции*, разрушают сам процесс и результат квантовых вычислений. Поэтому декогерентность является одним из существенных препятствий к созданию квантового компьютера. Отсюда и возникает задача логико-вероятностной оценки выполнения принципа суперпозиции на этапе проектирования.

Декогерентность под воздействием окружения квантовой системы, происходящая в ходе вычислений, приводит также к накоплению погрешностей в искомом решении, Однако погрещности в решении возникают также из-за неточного выполнения самих управляемых квантовых операций (вентилей), т.к. параметры этих операций задаются только с некоторой "физической" точностью. Поэтому целесообразно отнести к явлениям декогерентности также и процессы, возникающие из-за отклонения от идеальности управляющих внешних полей. (По существу к окружению мы причисляем и самого экспериментатора с его аппаратурой, предназначенной для управления квантовой эволюцией в компьютере).

Работа однотактной квантовой схемы описывается уравнением

$F_i = F_i(|x_1\rangle, |x_2\rangle, ..., |x_n\rangle, NOT)$, i=1,2,...,m (1)

Разрушение суперпозиции вследствии явления декогерентности оценивается через вероятность выполнения соотношения (1). Оно записано для спиновой системы на языке булевой алгебры с оператором NOT, который обеспечивает логическую полноту описании; это обратимый вентиль Тоффоли или дважды контролируемое "НЕТ"(Controlled-Controlled- NOT≡CCNOT).

В общем случае состояние квантовой системы, в отличие от классической, может находится в некоторой когерентной суперпозиции из 2^L булевых состояний, т.е. характеризуются вектором состояния в 2^L -мерном гильбертовом пространстве. Для описания такой квантовой суперпозиции в классическом вычислительном устройстве потребуется задать 2^L комплексных чисел, т.е.понадобятся *экспоненциально большие* вычислительные ресурсы. Уже для L=100 их число исключительно велико-порядка 10^{30}! Отсюда делается обратный вывод о том, что эффективное моделирование квантовых систем, содержащих до сотни двухуровневых элементов, *практически недоступно классическим компьютерам.*

Пусть регистр схемы F состоит из k отдельных кубитов f_h (где h=1,2,....k) и пусть каждый кубит (в соответствии с суперпозицией) имеет четыре минтерма $|y_{h1}\rangle$, $|y_{h2}\rangle$, $|y_{h3}\rangle$, $|y_{h4}\rangle$, и одну информационную выходную шину f_h Тогда для системы из *k* кубитов будем иметь набор уравнений алгебры логики:

$f_h = f_h(|y_{h1}\rangle, |y_{h2}\rangle, ..., |y_{hg}\rangle, NOT)$, где h=1,2,...,k, $1 \le g < (k+n)$. (2)

В силу вероятностной природы квантового компьютера и явления декогерентности реальные схемы при своей работе будут давать неправильный результат: 0 вместо 1 или наоборот. Для проведения анализа работы квантовых схем из таких кубитов необходима некоторая идеализация, заменяющая определенные переходы кубита из одного состояния в другое статистически.

Обозначим событие “кубит f_h в данный момент работает правильно через α_h =1, а α_h =0 соответствует его невыполнению”. С учетом сделанных допущений состояние выходной шины кубита в зависимости от входных переменных и выполнения события α_h запишется в виде

$$f_h^{(n)}(|y_{h1}\rangle, |y_{h2}\rangle,...,|y_{hg}\rangle, NOT) = \alpha_h f_h(|y_{h1}\rangle, |y_{h2}\rangle,...,|y_{hg}\rangle, NOT) \vee$$
$$\vee\ \underline{\alpha}_h \underline{f}_h(|y_{h1}\rangle, |y_{h2}\rangle,...,|y_{hg}\rangle, NOT) \qquad (3)$$

Таким образом, на каждом из k кубитов схемы F появляется своя дополнительная входная переменная α_h, воздействующая на этот кубит в соответствии с соотношением (3). При этом независимо от того, выполняется суперпозиция или нет, независимо от функций, выполняемых кубитом и величины вероятности его правильной работы (т.е. если даже p_h=1) каждому кубиту сопоставляется свой номер h и своя переменная α_h.

Заметим, что если функция f_h задана в виде с.д.н.ф.

$$f_h(|y_{h1}\rangle,|y_{h2}\rangle,...,|y_{hg}\rangle, NOT) = \bigvee_{r=9}^{r=2^g-1} \alpha_{hr}(|y_{h_g}^{r_g}\rangle, |y_{h_{(g-1)}}^{r_{g-1}}\rangle,...,|y_{h_1}^{r_1}\rangle, NOT)$$

(4)

где r принимает значения от r=0 до r=2^g-1 и имеет двоичную запись

r= {r_g,r_{g-1},...,r_1}, α_{hr}=$f_h(r_1,r_2,...,r_g)$, и в соответствии с принятым нами обозначением

$|y_{he}^{re}\rangle$ = $|y_{he}\rangle$ при r_e =1 и $|y_{he}^{re}\rangle$ = $|\underline{y}_{h1}\rangle$ при r_e =0. Тогда соотношение (3) можно представить в виде с.д.н.ф.

$$f_h^{(n)}(|y_{h1}\rangle,|y_{h2}\rangle,...,|y_{hg}\rangle,\alpha_h), NOT) = \bigvee_{r=0}^{r=2^g-1} (|a_{hr}\rangle\, \alpha_h \vee |\underline{a}_{hr}\rangle \underline{\alpha}_h) \times$$

$$\times\ (|y_{hg}^{rg}\rangle |y_{h_{(g-1)}}^{r_{g-1}}\rangle ... |y_{h_1}^{r_1}\rangle, NOT) \qquad (5)$$

С учетом введения новых входных переменных α_h (h=1,2,...,k) работа схемы будет описываться новой системой уравнений алгебры логики, которую можно получить, зная структуру схемы

$$F_i^{(\alpha)} = F_i^{(\alpha)}(|x_1\rangle,|x_2\rangle,...,|x_n\rangle, \alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_k, NOT)\ ;\ i=1,2,...,m \qquad (6)$$

Событие “i-я выходная шина схемы F в данный момент работает правильно” означает α_h =1 и наоборот α_h =0 соответствует не выполнению события. При этом можем записать $F_i^{(\alpha)} = \alpha_{Fi}F_i \vee \underline{\alpha}_{Fi}\underline{F}_i$ (i=1,2,...,m). Откуда

$\alpha_{Fi} = F_i^{(\alpha)} F_i \vee \underline{F}_i^{(\alpha)}\underline{F}_i$. Таким образом, зная $F_i^{(\alpha)}$, легко определить α_{Fi} в виде с.д.н.ф.

$$\alpha_{Fi}(|x_1\rangle,...,|x_n\rangle, \alpha_1,... \alpha_k, NOT) = \bigvee_{s,j=0}^{j=2^k-1} B_{sj}^{(i)} (\alpha_h^{j_k}\, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}} ..\, \alpha_1^{j_1}) \times$$

$$\times (|x_n^{s_n}\rangle |x_{n-1}^{s_{n-1}}\rangle ... |x_1^{s_1}\rangle, NOT) \quad \text{и} \quad B_{sj}^{(i)} = A_{sj}^{(i)} A_s^{(i)} \vee \underline{A}_{sj}^{(i)} \underline{A}_s^{(i)} \qquad (7)$$

Коэффициенты $A_s^{(i)}$ одинаковы для логически эквивалентных схем и в этом смысле не зависят от их структуры. Однако коэффициенты $A_{sj}^{(i)}$ и $B_{sj}^{(i)}$ зависят от структуры схемы. Обозначим: $P(\alpha_{Fi})$- вероятность правильной работы i-й выходной шины кубита ; $P(F_i)$ -вероятность того, что i-я выходная шина кубита возбуждена; μ_s -вероятность появления на входных шинах кубита входа ($|s_1\rangle$, $|s_2\rangle$,..., $|s_n\rangle$). Так как события α_1,... α_k и и событие ($|x_1\rangle$= $|s_1\rangle$, $|x_2\rangle$ = $|s_2\rangle$,..., $|x_n\rangle$ = $|s_n\rangle$) взаимно независимы, то можно перейти к алгебраическим соотношениям:

$s=2^n-1,\ j=2^k-1$

$$P(F_i) = \sum_{j,\ s=0} A_{sj}^{(i)} [(p_k)^{j_k} (p_{k-1})^{j_{k-1}} \ldots (p_1)^{j_1}]\, \mu_s, \tag{8}$$

$$P(\alpha_{Fi}) = \sum_{s,j=0}^{s=2n-1,\ j=2k-1} B_{sj}^{(i)} [(p_k)^{j_k} (p_{k-1})^{j_{k-1}} \ldots (p_1)^{j_1}]\, \mu_s, \tag{9}$$

Выражение (9) и решает поставленную задачу для кубита с одной выходной шиной. В случае, если схема кубита F имеет m выходных шин, то выход кубита будет удовлетворять системе уравнений (5) только в том случае, если состояние каждой выходной шины будет удовлетворять соответствующему уравнению из этой системы. Следовательно, событие α_F - “кубит F в данный момент работает правильно” - будет связано с $\alpha_{F1}, \alpha_{F2},\ldots, \alpha_{Fm}$ соотношением $\alpha_F = \alpha_{F1}, \alpha_{F2},\ldots, \alpha_{Fm}$.

Если теперь подставить в выражение (9) соотношения (17) и привести его к виду с.д.н.ф.

$$\alpha_F\ (|x_1\rangle, \ldots, |x_n\rangle, \alpha_1, \ldots \alpha_k, NOT) = \bigvee_{s,j=0}^{s=2^k-1,\ j=2^k-1} B_{sj}\, (\alpha_h^{j_k}\, \alpha_{k-1}^{j_{k-1}} .. \alpha_1^{j_1}) \times \tag{10}$$

$$\times (|x_n^{s_n}\rangle |x_{n-1}^{s_{n-1}}\rangle \ldots |x_1^{s_1}, NOT\rangle); \text{ где } B_{sj} = B_{sj}^{(1)} B_{sj}^{(2)} \ldots B_{sj}^{(m)} \tag{11}$$

Далее, переходя к алгебраическому равенству между вероятностями, получим для вероятности правильной работы схемы $P(\alpha_F)$ выражение

$$P(\alpha_F) = \sum_{s=0,\ j=0}^{s=2^n-1,\ j=2^k-1} B_{sj} [(p_k)^{j_k} (p_{k-1})^{j_{k-1}} \ldots (p_1)^{j_1}, NOT]\, \mu_s, \tag{12}$$

Как видно, вероятность правильной работы схемы зависит не только от ее структуры и p_h (h=1,2,...,k), но и от вероятности выполнения принципа суперпозиции.

Литература

1. Физическая энциклопедия.Т.2, с.276.
2. Р.Фейнман. Квантовомеханические компьютеры// в книге квантовый компьютер & квантовые вычисления //1999,Ижевск,Редакия журнала “Регулярная и хаотическая динамика”.с.125-156.
3. П.Шор.Полиномиальные по времени алгоритмы разложения числа на простые множители и нахождения дискретного логарифма для квантового компьютера//там же с.200-247.
4. Ю.И.Манин. Классическое вычисление, квантовое вычисление и факторизация Шора//там же, с.248-286.
5. Д.Дойч, Р.Джозэса. Быстрое решение задач с помощью квантовых вычислений//там же, с.190-199.
6. Albert,D.Z.Phys.Let. A 98,249,1983]
7. С.Порецкий.Решение общей задачи теории вероятности при помощи математической логики//Из.Казанского у-та, 1887.
8. R.Raussendorf and H.J.Briegel,http//xxx.lanl.gov/abs/quant-ph/0010033.
9. К.А.Валиев, А.А.Кокин. Квантовые компьютеры: надежды и реальность-Ижевск:НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”,2001, 352 с.

LOGICAL - PROBEBILITY THE VALUATION OF COMPLETION PRINCIPLE OF SUPERPOSITION IN QUANTUM TO COMPUTING SYSTEM

Arutyunov P.

Moscow State University of Electronics and Mathematics
109028, Russia, Moscow, B.Triohsviatitelsky 3 /12, E-mail:root@onti.miem.msk.su

The element base of classical and quantum computers is in essence various. The logic gate for classical computer represents the trigger at of which two steady conditions; one of them code "1" other "0". The logic gate for quantum computer presents from self spin electron or atom; it name qubits. Spin at electron has 2s+1 possible orientations concerning to chosen direction.Spin electrona this mechanical moment, size of which results from the facts, known about spectra sheloch of metals. The experience shows, that spin has only two possible orientations,i.e. 2s+1=2, or s=+1/2 and the trigger behaves as. However, in difference from classical elements trigger,qubit can is not only in which - one of two pure basic conditions, but also in both conditions simultaneously,i.e. The vector of condition can represent arbitrary kogerentum the superposition of basic conditions.

It is here important to note metrologs the aspects of quantum calculations. Due to interection of quantum system of quantum computer with "environment" the processes of destruction quantum когерентных of conditions кубитов, arise which name decoherence of conditions of quantum system. Quantum calculations proceed the effect on qubits, as a result which they make controlled quantum evolution. The various difficult superpositions of conditions кубитов are thus formed. The processes decoherence, the superpositions, are destroyed by the process and result of quantum calculations. Therefore decoherence is one of considerable obstacles to creations of quantum computer. From here and the task logico-probebility of valuation of completion of principle of superposition on stage of designing arises.

Decogerence under effect окружения of quantum system, occurring during calculations, causes also to accumulation of errors in required decision, However error mistake in decision arise also because of inexact completion of controlled quantum operations, since the parameters of these operations are set only with some "physical" accuracy. Expediently to attribute(relate)

to phenomena декогерентности also and processes, arising because of deviations from ideal of managing external fields. The work of single-cycle quantum outline is described by equation

$$F_i = F_i\,(|x_1\rangle, |x_2\rangle, \ldots, |x_n\rangle, \text{NOT}), \qquad i=1,2,\ldots,m \qquad (1)$$

Destruction of superposition because of phenomenon decoherence is evaluated through probability of completion of ratio (1). It is recorded for spin system on language of boolean algebra with operator NOT, which provides the logic completeness description; This convertible gate Toffoly or twice controllable "IS NOT PRESENT" (Controlled-Controled- NOT (CCNOT).

Reference

1. Physical enziclopedia.T.2, c.276.
2. P.Feiman. Quantomehanical the computers // in book the quantum computer . the quantum calculations // 1999, Ishevsk, Redaction of journal"Regular and chotic the dynamics(changes)".c.125-156.
3. И.Manin.The classical calculation, quantum calculation and factorisation Shora // there, c.248-286.
4. К.A.Valiev, A.A.Kokin The quantum computers:hope and реальность-Ishevsk: NiS " Regular and chotic dynamics(changes) ",2001, 352 s.