СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШАЮЩИХ СТАТИСТИК В ЗАДАЧЕ ОБНАРУЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СИГНАЛОВ В СЛУЧАЕ КОРОТКИХ ВЫБОРОК

Болховская О.В., Мальцев А.А.

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

В настоящей работе проводится сравнительный анализ нескольких алгоритмов обработки сигналов в антенной решетке, используемой для обнаружения многомерных гауссовских комплексных сигналов с априорно неизвестной пространственной ковариационной матрицей на фоне гауссовского шума. Все исследуемые решающие статистики получены на основе обобщенного отношения правдоподобия для выборок произвольного объема.

Рассмотрим p-элементную узкополосную приемную антенную решетку с произвольным расположением датчиков. Будем считать, что сигналы с элементов антенны образуют комплексный случайный p-мерный гауссовский вектор z. Предполагается, что осуществляется N выборок выходного сигнала $z_1, z_2, \ldots, z_N$, которые являются статистически независимыми, одинаково распределенными случайными векторами с нулевым средним значением и пространственной ковариационной матрицей Σ. Задача обнаружения узкополосного пространственно коррелированного сигнала антенной решеткой формулируется как классическая двухальтернативная задача:

Нулевая гипотеза (только шум), H_0: $\Sigma=\Sigma_0$,

Альтернативная гипотеза (сигнал плюс шум), H_1: $\Sigma\neq\Sigma_0$.

При этом введение характеристик шума происходит с помощью задания ковариационной матрицы Σ_0. В зависимости от имеющейся априорной информации о шумовом фоне будем рассматривать три различных варианта нулевой гипотезы в порядке возрастания имеющейся априорной информации.

Пусть в первом случае мы не имеем никакой априорной информации о шуме, кроме условия независимости его отсчетов в различных элементах антенны. Ковариационная матрица Σ_0 такого шума будет иметь вид:

$$\mathbf{У}_{01} = \begin{matrix} \sigma_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{pp}^2 \end{matrix} . \qquad (1)$$

и будет соответствовать гипотезе H_{01}. Если дополнительно к независимости шума в элементах антенны имеется априорная информация об его однородности (одинаковой мощности в разных элементах антенны $\sigma_{ii}^2 = \sigma^2 = \mathrm{const}$), то ковариационная матрица будет равна

$$\mathbf{У}_{02} = \sigma^2 \mathbf{I} . \qquad (2)$$

Соответствующую нулевую гипотезу будем обозначать $H_{02.}$ В случае, если дополнительно к этой информации известна еще и мощность шума σ^2, ковариационная матрица шума будет единичной:

$$\mathbf{У}_{03} = \mathbf{I} . \qquad (3)$$

Соответствующую нулевую гипотезу будем обозначать H_{03}.

Обобщенное отношение правдоподобия для сформулированной выше двухальтернативной задачи можно записать в виде

$$\Lambda = \frac{\max\limits_{\Sigma\in\omega} L(\mathbf{0}, \mathbf{У})}{\max\limits_{\Sigma\in\Omega} L(\mathbf{0}, \mathbf{У})}, \qquad \mathbf{(4)}$$

где $L(\mathbf{0}, \mathbf{У}) = \dfrac{1}{|\mathbf{У}|^N \pi^{pN}} e^{-\sum\limits_{\alpha=1}^{N} \mathbf{z}(\alpha)^* \mathbf{У}^{-1} \mathbf{z}(\alpha)}$ - функция правдоподобия для комплексного гауссовского распределения, ω - подобласть, соответствующая нулевой гипотезе H_0 в полном пространстве параметров Ω, |.| - детерминант матрицы, а знак * означает эрмитовское сопряжение.

Для каждой из этих гипотез на основе обобщенного отношения правдоподобия в работах [3], [4] ,было получено явное выражение для решающей статистики

$$\Lambda_1 = \frac{|A|^N}{\left(\prod_{i=1}^{p} a_{ii}\right)^{pN}}, \quad \Lambda 2 = \frac{|A|^N}{\left(\frac{spA}{p}\right)^{pN}}, \quad \Lambda_3 = \left(\frac{e}{N}\right)^{pN} |A|^N e^{\frac{-spA}{N}} \qquad (5)$$

где .**A** – матрица сумм квадратов и попарных отклонений величин от среднего значения.

Для полноты сравнения рассмотрим также решающую статистику, полученную на основе обобщенного отношения правдоподобия (4) в случае нулевой гипотезы(3), но при дополнительной априорной информации о полной пространственной когерентности принимаемого (ожидаемого) полезного сигнала [2]. Компоненты узкополосного пространственно-когерентного сигнала, принимаемые элементами антенной решетки, полностью коррелированы и различаются только амплитудой и фазой. Поэтому вектор полезного сигнала **S**(t) в этом случае может быть записан в виде **S**(t)=a(t)**S**, Здесь a(t) – комплексная амплитуда (гауссовский комплексный сигнал с нулевым средним и мощностью ν), а вектор-фазор **S** определяет сдвиг фаз и распределение амплитуд между сигналами, принимаемыми элементами антенной решетки. Без ограничения общности будем считать, что вектор S подчиняется следующей нормировке:**S*****S**=p, где p – число элементов антенной решетки. При такой нормировке ν имеет смысл усредненной мощности внешнего сигнала по элементам антенны (каждый элемент в среднем принимает мощность ν). В этом случае корреляционная матрица вектора **z**, состоящего из аддитивной смеси сигнала **S**(t) и гауссовского шума единичной мощности, записывается в следующем виде: $\mathbf{Y} = \mathbf{E} + \nu\mathbf{S}\mathbf{S}^*$. Как показано в [2], для обнаружения когерентного сигнала с неизвестным волновым фронтом оптимальным решением является сравнение с некоторым порогом максимального собственного числа $\hat{\lambda}_1$ выборочной ковариационной матрицы $\hat{\mathbf{Y}}$.

Для определения пороговых значений первых трех решающих статистик их плотности вероятностей раскладываются в ряд по ортогональным полиномам Якоби [3], [4], а задача нахождения пороговых значений для так называемого «max-λ теста» была решена в работе [2].

Помехоустойчивость систем обнаружения, работающих на основе полученных статистик V_1 – V_4 была исследована путем численного моделирования. В соответствии с рассматриваемыми нулевыми гипотезами H_{01} и H_{02} собственный шум моделировался в первом случае как неоднородный, с разными мощностями в антенных элементах и ковариационной матрицей (1) и, во втором случае, как однородный, с одинаковой мощностью в антенных элементах и ковариационной матрицей (2). Средняя по всем элементам антенны мощность неоднородного шума совпадала с мощностью однородного шума в одном элементе.

Рассматривались две модели полезного сигнала. В первой модели полезный сигнал был пространственно-когерентным (плоская волна). Во второй модели сигнал задавался частично-когерентным. В качестве такого частично-когерентного сигнала бралась плоская волна с флуктуирующим волновым фронтом. Предполагалось, что закон изменения угла падения волны представляет собой нормальный случайный процесс с независимыми приращениями $\Theta[n+1] = \Theta[n](1-b) + q\xi[n]$, где ξ[n] – белый гауссовский шум с нулевым средним и единичной дисперсией, q – коэффициент, определяющий полную мощность порождающего шума, а b – коэффициент, определяющий скорость спадания корреляции. Моделировалась 5-элементная линейная эквидистантная антенная решетка с расстоянием между соседними элементами, равным половине длины волны. В проведенном моделировании коэффициенты b и q были подобраны таким образом, чтобы стандартное отклонение угла прихода полезного сигнала составляло $\sigma_\Theta \approx 13°$. Время корреляции угла прихода τ_Θ бралось равным $\tau_\Theta \approx 0.1T$, где T – время взятия всей выборки объема N=15. Такой подбор параметров сигнала обеспечивал его существенную пространственную некогерентность на апертуре приемной антенной решетки.

Было проведено сравнение эффективности использования всех четырех рассмотренных выше статистик V_1, V_2, V_3, V_4 для обнаружения полезного сигнала. По заданной вероятности ложной тревоги рассчитывались пороговые значения для используемых статистик и строились кривые обнаружения (вероятности правильного обнаружения) в зависимости от отношения полезного сигнала к мощности шума (в одном антенном элементе). На основании проведенных исследований можно сделать следующие рекомендации по применению рассмотренных выше решающих статистик:

1. Можно рекомендовать использовать статистику V_4 («max-λ тест») для обнаружения полностью пространственно-когерентных и частично-когерентных сигналов с флуктуирующим волновым фронтом на фоне пространственно-однородного аддитивного шума.
2. Для обнаружения пространственно-когерентных и частично-когерентных сигналов на фоне средне- и сильнонеоднородных шумов следует использовать статистику V1. Расчет пороговых значений для этой статистики может быть проведен аналитически на основе предложенного в работах [3],[4] метода.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №03-02-17141, НШ-1729.2003.2, NATO PST.CLG 977419.

Литература:

1. Б.Р. Левин «Теоретические основы статистической радиотехники». М.: Советское радио, 1974.
2. Родюшкин К.В. Диссертация на соискание ученой степени кандидата наук. Нижний Новгород, 2001.
3. Болховская О.В., Мальцев А.А. Определение пороговых значений обобщенного отношения правдоподобия в задаче обнаружения пространственных частично-когерентных сигналов в случае коротких выборок. Изв. ВУЗов. Радиофизика, т. XLV № 12.
4. O.V. Bolkhovskaya, A.A. Maltsev, L. Lo Presti, F.Sellone «Approximation of distribution function of a generalized likelihood ratio for the detection of spatially coherent signals», International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA 01), September 2001, Torino, Italy, pp.655-658.