ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАЕКТОРИИ ОБЪЕКТА ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ УГЛОВОГО ПОЛОЖЕНИЯ ОБЪЕКТА НЕСКОЛЬКИМИ ИСТОЧНИКАМИ, РАЗНЕСЕННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Ненартович Н.Э., Исаков И.Н.

ОАО «НПО «АЛМАЗ» имени академика А.А. Расплетина», Москва

Постановка задачи

Рассматривается задача оценивания траектории объекта по данным о ее угловом положении от нескольких источников.

Предлагается субоптимальная рекуррентная процедура, основанная на процедуре Калмана для дискретной системы при следующих допущениях:

- задача отождествления информации от разных источников решена;
- источники информации имеют единую систему времени;
- имеются оценки дисперсий ошибок измерения углового положения объекта для каждого источника;
- мат. ожидания ошибок измерения углового положения объекта близки к нулю;
- известны положения источников в единой системе координат;
- измерения углового положения объекта производятся в единой системе координат.

Определения

Местная земная система координат

Местная земная система координат (МЗСК) - это прямоугольная система координат, начало которой находится в заданной точке, ось OY направлена вертикально вверх, ось OX направлена на север, ось OZ дополняет систему координат до правой.

Базовая система координат измерителя

Базовая система координат измерителя (БСК) – это прямоугольная система координат, начало которой находится в точке размещения измерителя, а оси параллельны соответствующим осям МЗСК.

Собственная система координат измерителя

Собственная система координат измерителя (ССК) – это прямоугольная система координат, начало которой находится в точке размещения измерителя, а ее разворот относительно МЗСК задан матрицей C.

Вычислительная схема

Для простаты описания рассмотрим двумерный случай. Пусть измеряются полярные координаты объекта (r, α) в БСК измерителей, при этом ошибки измерения (Δr, $\Delta\alpha$) описываются белым гауссовским шумом с нулевыми мат. ожиданиями, дисперсиями $\sigma_{\Delta r}^2$, $\sigma_{\Delta\alpha}^2$ и некоррелированы между собой. Будем рассматривать измерители в виде одного обобщенного измерителя, который в соответствующие моменты времени находится в точке расположения соответствующего измерителя и модель ошибок измерений обобщенного измерителя в соответствующий момент времени статистически эквивалентна модели ошибок соответствующего измерителя.

Тогда декартовы координаты объекты в БСК в n-ый момент времени рассчитываются по формуле:

$$Z_n^S = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{БСК} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Вектор Z_n^S можно интерпретировать как декартовы координаты объекты измеренные в прямоугольной системе координат развернутой относительно БСК на угол α_n – ССК измерителя. Истинные координаты объекта в ССК задаются выражением (2):

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{ССК}^{ИСТ} = \begin{pmatrix} r_n^{ИСТ} \cdot \cos\Delta\alpha_n \\ r_n^{ИСТ} \cdot \sin\Delta\alpha_n \end{pmatrix} \quad (2), \qquad \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}_{ССК}^{ИСТ} \approx \begin{pmatrix} r_n^{ИСТ} \\ r_n^{ИСТ} \cdot \Delta\alpha_n \end{pmatrix} \quad (3)$$

При условии малости дисперсии выражение (2) принимает вид (3).

Ошибки вектора описываются белым гауссовским шумом с нулевыми мат. ожиданиями и дисперсиями:

$$\sigma_{\Delta x_{ССК\,n}}{}^2 = \sigma_{\Delta r\,n}{}^2, \qquad \sigma_{\Delta y_{ССК\,n}}{}^2 = (r_n^{ИСТ} \cdot \sigma_{\Delta\alpha\,n})^2 \qquad (4)$$

Введем следующие обозначения:

$$C_n = \begin{pmatrix} \cos\alpha_n & -\sin\alpha_n \\ \sin\alpha_n & \cos\alpha_n \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_n = \begin{pmatrix} x_n^{ИЗМ} \\ y_n^{ИЗМ} \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} \sigma_{\Delta X_{ССК}}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\Delta Y_{ССК}}^2 \end{pmatrix}$$

$$G_n = C_n^T \cdot A_n, \quad Z_n = C_n^T \cdot Z_n^S + R_n \qquad (5)$$

$$\varPhi_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dt_n & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для измерений (1) может быть построен фильтр Калмана:

$$\begin{aligned} S_{n/n-1} &= \varPhi_n \cdot \widetilde{S}_{n-1} \\ \widetilde{S}_n &= S_{n/n-1} + K_n \cdot (Z_n - H \cdot S_{n/n-1}) \end{aligned}, \quad (6)$$

где $S_{n/n-1}$ - пролонгированное значение вектора состояния объекта (составленный из координат и компонент скорости объекта) для n-го момента времени, по данным (n-1)-го момента времени;

$\widetilde{S}_n, \widetilde{S}_{n-1}$ - сглаженные значения вектора состояния объекта для n-го и (n-1)-го моментов времени, соответственно;

K_n - матрица усиления фильтра, определяемая как:

$$K_n = P_n \cdot H^T \cdot (P_{\Delta Z\, n})^{-1}, \; P_n = \left[(\varPhi_n \cdot P_{n-1} \cdot \varPhi_n{}^T)^{-1} + H^T \cdot (P_{\Delta Z\, n})^{-1} \cdot H\right]^{-1}, \; P_{\Delta Z\, n} = G_n \cdot G_n{}^T$$

Устремим все $\sigma_{\Delta x_{CCK\, n}}$ к бесконечности. Найдем условие, когда оценки на выходе фильтра имеют лучшее качество, чем пролонгированные оценки $S_{n/0}$:

$$\begin{aligned} S_{n/0} &= \Phi_{\Sigma n} \cdot \widetilde{S}_0 \\ P_{n/0} &= \Phi_{\Sigma n} \cdot P_0 \cdot \Phi_{\Sigma n}{}^T \end{aligned}, (7)$$

где $\Phi_{\Sigma n} = \Phi_n \cdot \Phi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \Phi_1$.

Критерий качества определим как:

$$P_{n/0} \geq P_n, \qquad (8)$$

где знак $\geq$ означает, что матрица $(P_{n/0} - P_n)$ является неотрицательно определенной.

Можно получить, что:

$$P_n = \left[\left(\varPhi_{\Sigma n} \cdot P_0 \cdot \varPhi_{\Sigma n}{}^T\right)^{-1} + H^T \cdot (P_{\Delta Z\, \Sigma n})^{-1} \cdot H\right]^{-1}, \qquad (9)$$

где $\varPhi_{\Sigma n} = \varPhi_n \cdot \varPhi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \varPhi_1$, $(P_{\Delta Z\, \Sigma n})^{-1} = (P_{\Delta Z\, n})^{-1} + (P_{\Delta Z\, n-1})^{-1} + \ldots + (P_{\Delta Z\, 1})^{-1}$.

Из выражения (9) следует, что для выполнения условия (8) необходимо и достаточно, чтобы матрица $(P_{\Delta Z\, \Sigma n})^{-1}$ была невырожденной. Требование невырожденности можно трактовать как требование изменения в процессе измерения направления оси X ССК обобщенного измерителя, т.е.:

$$\sum_{i,j \in [1,n]; i \neq j} \left|\left[\vec{x}_i \times \vec{x}_j\right]\right| > 0, \qquad (10)$$

где $\vec{x}_i$ – первый столбец матрицы C_i^T.

Таким образом, при условии невырожденности матрицы $(P_{\Delta Z\, \Sigma n})^{-1}$, оценки на выходе фильтра (6) имеют меньшую корреляционную матрицу ошибок, чем оценки, построенные путем пролонгации начального состояния.

Теперь рассмотрим «прохождение» измерений Z_n через фильтр, в случае, когда $\sigma_{\Delta r}$ стремится к бесконечности.

Подставим в уравнение фильтрации (6) выражение измерения (5):

$$\widetilde{S}_n = S_{n/n-1} + K_n \cdot ((C_n)^T \cdot Z_n^s + R_n - H \cdot S_{n/n-1}) = K_n \cdot (C_n)^T \cdot Z_n^s + S_{n/n-1} + K_n \cdot (R_n - H \cdot S_{n/n-1})$$

Первое слагаемое в правой части полученного уравнения задает вклад измерений Z_n^s в оценку вектора состояния. Распишем его подробнее:

$$K_n \cdot (C_n)^T \cdot Z_n^s = P_n \cdot H^T \cdot (P_{\Delta Z\, n})^{-1} \cdot (C_n)^T \cdot Z_n^s$$

Можно получить, что:

$$K_n \cdot (C_n)^T \cdot Z_n^s = P_n \cdot H^T \cdot (C_n)^T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{-2}_{\Delta y_{CCK}} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} r_n \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

Из полученного выражения видно, что значение r_n (имеющее ошибку с «бесконечной» дисперсией) не влияет на оценку $\widetilde{S}_n$, так как чувствительность фильтра к этой компоненте измерений равна нулю. Поэтому вместо него может быть подставлено любое число, например нуль, то есть:

$$Z_n^s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Z_n = (C_n)^T \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_n \qquad (12)$$

Выражение (12) описывает случай, когда измерения являются «неполными», т.е. часть компонент измерения отсутствует (отсутствие дальности).

Таким образом, задача оценки координат и скорости объекта по измерениям углового положения объекта несколькими источниками решена.

Результаты имитационного моделирования

По результатам имитационного моделирования средний выигрыш предлагаемой схемы для реального объекта составляет 1.5÷2 раза относительно штатной схемы по точности определения текущих координат и компонент скорости.

Выводы

Предложен алгоритм цифровой фильтрации для оценки текущего вектора состояния дискретно-непрерывной системы, использующий комплексирование результатов дискретных измерений с дополнительной априорной информацией о компонентах расширенного вектора состояния модели дискретно-непрерывной динамической системы.

Список литературы

1. Гантмахер Ф. Теория матриц. «Наука», Москва 1988
2. Балакришнан А. Теория фильтрации Калмана. «Мир», Москва 1988
3. Фарина А., Студер Ф. Цифровая обработка радиолокационной информации. «Радио и связь», Москва 1993.