ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ И ОСОБЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРОВ НА Z-ПЛОСКОСТИ*

Кобелев В.Ю., Корепанов И.В., Буралков Д.В.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Россия, Ярославль, ул. Советская, 14. Тел. (0852) 79-77-75, E-mail: dcslab@uniyar.ac.ru

Реферат. Выполнено теоретическое исследование возможности параметризации ортогональных вейвлет-функции. Представлено практическое применение разработанной методики для анализа представления вейвлет фильтров на Z-плоскости. Получены закономерности движения нулей на Z-плоскости.

Возможность параметризации вейвлет-функций вытекает из некоторого произвола в определении вейвлета. Параметризация вейвлет-функций подчиняется следующей закономерности:

Число степеней свободы при определении вейвлета равно половине порядка вейвлета минус 1. Т.е., если порядок вейвлета есть 8, то он определяется тремя степенями свободы.

Варьируя параметрами параметризации, появляется возможность синтеза семейства вейвлетов, позволяющих оптимально решать поставленные задачи по сжатию и фильтрации информации. Вопросы параметризации вейвлет-функций уже неоднократно отражались в публикациях [1,2], в настоящей работе представлен несколько иной взгляд по этому вопросу.

Рассмотрим свойство ортогональности масштабирующей функции $\varphi(t)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\varphi(t-k)dt = \delta_k^0 , \qquad \sum_{i=0}^{M-1} C_{2k+1} C_i = 2\delta_k^0 . \tag{1}$$

где $C_0 \ldots C_{M-1}$ - есть коэффициенты масштабирующего уравнения на функцию $\varphi(t)$.

Пусть $H(j\omega)$ - Фурье-спектр коэффициентов $C_0 \ldots C_{M-1}$, тогда формулы (1) однозначно соответствуют нижеследующему выражению:

$$\left|H(j\omega)\right|^2 + \left|H(j(\pi-\omega))\right|^2 = 2 . \tag{2}$$

Представим $\left|H(j\omega)\right|^2$ косинусным рядом:

$$\left|H(j\omega)\right|^2 = \sum_{k=0}^{M-1} b_k \cos(k\omega). \tag{3}$$

После подстановки выражения (3) в (2) получим ряд соотношений:

- $b_k = 0, \quad при \quad k = 2, 4, \ \ldots M$
- $b_0 = 1.$
- $\sum_{k=0}^{M-1} b_k = 2$

Т.к. модуль $\left|H(j\omega)\right|$ есть всегда неотрицательная функция, следует ограничительное неравенство на коэффициенты в разложении (3).

Предложенный выше набор правил позволяет синтезировать функцию $\left|H(j\omega)\right|$, соответствующую вейвлет-функции желаемого порядка и обладающую желаемыми частотными свойствами.

Предложенная методика параметризации вейвлет-функций была использована для анализа состояний вейвлет-фильтров произвольных порядков на Z-плоскости. Задача синтеза вейвлет-функции с заданными параметрами была сопоставлена задаче синтеза минимально-фазового фильтра с известной амплитудной-частотной характеристикой и для решения использовался метод, описанный в работе Добеши [1].

В данной работе под вейвлет-фильтром понимается фильтр, чья импульсная характеристика образуется коэффициентами $C_0 \ldots C_{M-1}$ масштабирующего уравнения на масштабирующую функцию $\varphi(t)$.

Для анализа использовались семейства ортогональных вейвлетов различных порядков – 4,6,8,10 – 20. Разработана программа для расчета. Основная схема вычисления нулей состоит в следующем:

- выбираем порядок вейвлета (например семейство вейвлетов 10 порядка);
- вариацией параметров получаем различные вейвлет-функции;

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-02-17500)

- вычисляем нули вейвлет-фильтров и отображаем их на Z-плоскости;

На рисунках 1-4 представлено возможное размещение нулей вейвлет-фильтров.

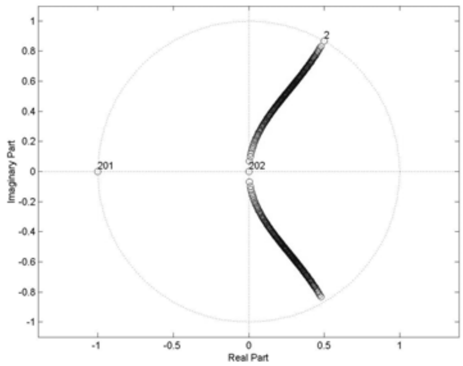

Рис. 1 Пространство нулей семейства вейвлетов 4-го порядка

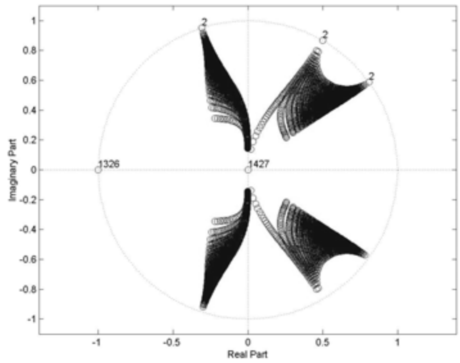

Рис. 2 Пространство нулей семейства вейвлетов 6-го порядка

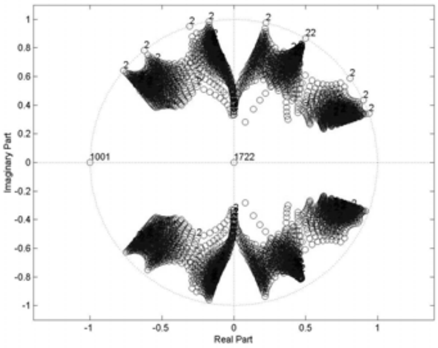

Рис. 3 Пространство нулей семейства вейвлетов 10-го порядка

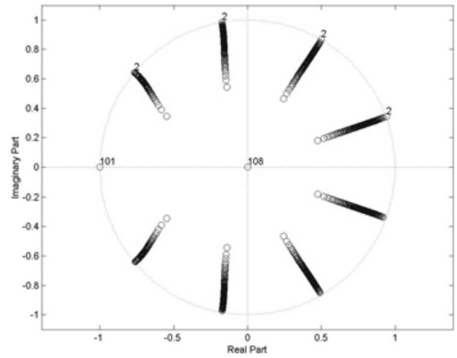

Рис. 4 Пространство нулей семейства вейвлетов 10-го порядка в частном случае при равенстве трех из четырех параметров нулю

Теоретически было получено уравнение кривой на рис.1 (уравнение 4). Анализ остальных кривых был выполнен эмпирически.

$$a_2^2 = \frac{a_1 + a_1^3 - a_1^2}{1 - a_1} \tag{4}$$

где $p = a_1 + ia_2$ – искомый нуль (точка кривой).

Из анализа полученных областей сделан ряд выводов:

1. Пространство нулей семейств вейвлет-фильтров на Z-плоскости разделено на сектора. Выделенные сектора можно условно разделить на основные и дополняющие. Под дополняющий набором секторов понимается набор нулей, дополняющий пространство распределения нулей семейства порядка N-1 до семейства порядка N.
2. Общая картина распределения секторов представляется интерполяцией дополняющих секторов различных порядков.
3. Количество дополняющих секторов N равно порядку вейвлет-фильтра M минус 1.
4. Дополняющие сектора размещены равномерно, за начало отсчета выбрано направление $\varpi=\pi$.
5. Получены ассимтоты, ограничивающие сектора.
6. Получена оценка расширения пространства нулей при увеличении порядка семейства вейвлет-функци.

Полученные результаты могут быть использованы при решении ряда задач по синтезу вейвлет-фильтров:

- синтез вейвлет-фильтров с нужной амплитудно-частотной характеристикой;
- синтез вейвлет-фильтров с нужным распределением нулей.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотичная динамика”, 2001, 464 стр.
2. Kumar M. Mandal. Wavelet for image compression. University of Ottawa, 1995, p.180