СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Лобанов С.В.
Московский авиационный институт (государственный технический университет)
125871, Москва, Волоколамское шоссе, 4, кафедра 402 РСУПИ

Традиционно линейное ортогональное преобразование информации занимает в науке и технике важную роль. В основе ортогонального преобразования лежит линейное преобразование и критерий МСКО, который при использовании условий ортогональности и нормировки дает классический частотный Фурье анализ сигналов.

К недостаткам преобразований, основанных на критерии МСКО относится то, что они предназначены для обработки стационарных сигналов. Реальные же сигналы далеко не стационарны. Поэтому возникает необходимость в доработке МСКО таким образом, чтобы он стал пригодным для обработки нестационарных сигналов. При этом желательно, чтобы преобразование, основанное на новом критерии, было не значительно более трудоемко, чем исходный метод, и также являлось бы ортогональным преобразованием, что значительно облегчает построение многомерных преобразований.

Возможно, что ответ на этот вопрос лежит в модернизации МСКО таким образом, чтобы учитывалась некоторая корреляционная связь каждого из элементов блока с некоторой общей групповой характеристикой обрабатываемого блока данных, например, со средним значением. Если, допустим, некоторый элемент блока плохо коррелирован с такой характеристикой блока, то он исключается из формирования ошибки. Можно предложить следующий вариант МСКО:

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(j)(x(j) - \tilde{x}(j))^2 , \qquad (1)$$

где $\rho(j)$ - весовой коэффициент (коэффициент корреляции с общей характеристикой блока) для j-го элемента блока данных. Соответственно для линейного преобразования выражение (1) будет записано следующим образом:

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(j)(x(j) - \sum_{\omega=0}^{N-1} y(\omega)T(\omega, j))^2 \qquad (2)$$

Дифференцируя это выражение по $y(k)$, а затем, приравнивая полученное выражение нулю, имеем:

$$\sum_{\omega=0}^{N-1} y(\omega) \sum_{j=0}^{N-1} \rho(j)T(\omega, j)T(k, j) = \sum_{j=0}^{N-1} \rho(j)x(j)T(k, j)$$

Следовательно, если ввести такое условие ортогональности

$$\sum_{j=0}^{N-1} \rho(j)T(\omega_1, j)T(\omega_2, j) = 0 \quad \text{при} \quad \omega_1 \neq \omega_2 , \qquad (3)$$

то получаем следующее выражение для нахождения коэффициентов преобразования

$$y(\omega) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j)\rho(j)T(\omega, j) \Big/ \sum_{j=0}^{N-1} \rho(j)T(\omega, j)^2 \qquad (4)$$

Выражение (4) не удобно для непосредственного применения, т. к. предполагает в явном виде знание и использование коэффициентов $\rho(j)$. Гораздо более эффективно такое вычисление спектра, когда весовые коэффициенты входят в сами элементы матрицы преобразования.

Одним из подходов к обработке нестационарных сигналов является ортогональные wavelet преобразования, решающие данную проблему, т. е. ортогональное преобразование в котором в качестве базисных коэффициентов используются вейвлет-функции. Для построения такого преобразования необходимо найти такую симметричную матрицу (аналогичную ковариационной в методе Карунена-Лоэва), собственные вектора которой являлись бы оптимальным ортогональным wavelet преобразованием для заданного случайного процесса.

В качестве основы для формирования данной матрицы можно предложить следующее выражение для вычисления элемента ковариационной матрицы:

$$K(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} \left\{ \frac{\rho(s)}{N - s + 1} \sum_{t=0}^{N-s} \left\{ \frac{1}{s} \sum_{p=t}^{t+s-1} x_i x_j - \left\{ \frac{1}{s} \sum_{p=t}^{t+s-1} x_i \right\} \left\{ \frac{1}{s} \sum_{p=t}^{t+s-1} x_j \right\} \right\} \right\} \qquad (5)$$

Здесь N – длина реализации случайного процесса $\overrightarrow{X}_j = x_0(j)\ldots x_{n-1}(j)\ (j=\overline{0\ldots N-1})$; n – размер обрабатываемого блока данных; $\rho(s)$ - весовой коэффициент значимости соответствующего отрезка случайного процесса длиной s (в частности может быть равен единице).

В (5) происходит вычисление средневзвешенной суммы ковариационных моментов для участков случайного процесса различной длины. Весовые коэффициенты могут выбираться исходя из значимости участка заданной длины. Следовательно, преобразование, составленное из собственных векторов симметричной матрицы, найденной в соответствии с (5), будет являться ортогональным вейвлет-базисом обработки нестационарного случайного процесса $\overrightarrow{X}$ и будет локализовано как по времени, так и по частоте.

Синтез оптимальных ортогональных вейвлетов для заданного случайного процесса можно также проводить следующим путем. Имея для данного процесса оптимальные стационарные матрицы преобразований различной размерности, составленные из собственных векторов ковариационных матриц соответствующей размерности в соответствии с методом Карунена-Лоэва, можно найти по ним оптимальную вейвлет-матрицу. Это означает, что из оптимальных ортогональных матриц преобразования, найденных из предположения, что процесс стационарен, можно также найти оптимальную ортогональную матрицу преобразования для нестационарного процесса, т. е. вейвлет-матрицу.

Для этого необходимо воспользоваться принципом субполосного кодирования. Как известно, принцип субполосного кодирования [1, 2] заключается в последовательном разделении исходного сигнала на низкочастотную и высокочастотную части с последующим понижением частоты дискретизации вдвое и последовательным итерационном применении этой процедуры к низкочастотной части. При этом коэффициентами wavelet преобразования являются результат высокочастотной фильтрации.

Отличие предлагаемой схемы состоит в том, что вместо операций фильтрации с помощью цифровых фильтров предлагается все операции производить над спектром оптимального линейного ортогонального преобразования в предположении, что данный случайный процесс является стационарным. При этом рекуррентно повторяется следующая процедура. Спектр преобразования разделяется на две части - верхнюю и нижнюю половины. Далее над верхней частью спектра производят операцию восстановления исходя из того, что этот спектр является низкочастотным. Результат обратного восстановления является коэффициентами DWT. Над низкочастотной частью спектра производится дальнейшая обработка по такой же схеме, но с учетом того, что ее размер в два раза меньше, чем исходный. Этот принцип иллюстрирует рис. 1.

Оптимальность данного преобразования заключается в сочетании wavelet принципов обработки сигналов и оптимального линейного ортогонального преобразования. Линейное ортогональное преобразование является в этом случае частью отвечающей за обработку сигнала в предположении, что он стационарный. Субполосная часть же адаптирует стационарную часть на обработку случайного процесса в предположении, что он является нестационарным.

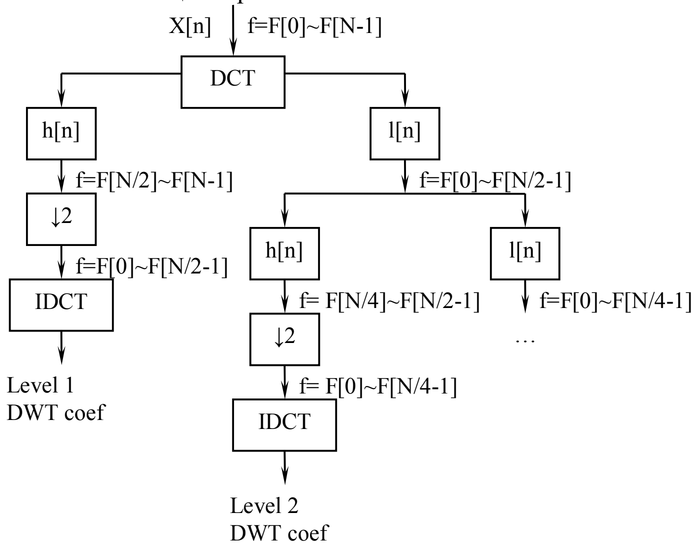

Рис. 1. Принцип оптимального wavelet преобразования.

Для данного метода алгоритм формирования элемента матрицы оптимального ортогонального вейвлет-преобразования размерности N будет выглядеть следующим образом:

$$W(\omega,i,N)=\sum_{j=0}^{P-1} M(P+j,i,N)M(j,\omega-P,P) \qquad (6)$$

где $M(\omega, i, N)$ – элемент стационарной ортогональной матрицы размерности N, стоящий на пересечении ω строки (частота) и i-го столбца (время); $P(\omega) = 2^{floor(\log_2 \omega)}$ – параметр, который равен наибольшему числу из последовательности $N/2^k$ $(k = 0,1,...,\log N)$ не превышающему ω. Нетрудно показать, что вейвлет-матрица, составленная из элементов $W(\omega, i, N)$, будет ортогональной и ортонормированной.

В случае многомерного преобразования, например двумерного, рассчитываются оптимальные ортогональные преобразования отдельно по горизонтальной Wx и вертикальной Wy составляющим. Результирующее преобразование проводится по следующей схеме:

$$W(\omega_x, \omega_y, N_x, N_y) = \sum_{i=0}^{N_x-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} S(i, j) Wx(\omega_x, i, N_x) Wy(\omega_y, j, N_y) \qquad (7)$$

Данное преобразование позволяет обрабатывать не только квадратные участки изображений, но и любой другой произвольной размерности кратной двум. В этом случае размерность матрицы Wx составляет N_x*N_x, а размерность матрицы Wy – N_y*N_y.

При использовании какого-либо определенного преобразования, например ДКП, коэффициенты вейвлет-матрицы можно рассчитать по формуле (6) в явном виде. В этом случае в (7) на размеры обрабатываемого участка не накладываются никаких ограничений.

Литература

1. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. – С. – Петербург: Военный университет связи, 1999. – 204 с.
2. Новиков Л. В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. – С. – Петербург: ИАнП РАН, 1999. – 152 с.