ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СДВИГА ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ДИСКРИМИНАТОРОВ

Радченко Ю.С.

Воронежский госуниверситет
пл. Университетская 1, Воронеж, Россия, 394693, Тел. (0732) 20-89-16

Передача по каналам цифровой связи потоков сообщений, телевизионных и компьютерных изображений предполагает применение процедуры сжатия сигналов. В настоящее время наибольший интерес вызывают алгоритмы, основанные на разложении сигналов по некоторому ортогональному базису. Так в стандарте MPEG-2 используется дискретное косинусное преобразование. В настоящее время внимание исследователей привлекает способ разложения сигналов по базису классических ортогональных полиномов Чебышева, Эрмита, [1,2,3]. Он позволяет добиться, как показывают расчеты, максимального сжатия и допускает реализацию в виде "быстрых" алгоритмов преобразования. Разложения по базису ортогональных полиномов ввиду неинвариантности обобщенного спектра к сдвигу сигнала открывает возможности для синтеза оптимальных и квазиоптимальных в статистическом смысле алгоритмов оценки вектора движения и предсказание местоположения информационного фрагмента в последующих кадрах.

Пусть в моменты T и T+ΔT в подобласти $\{x,y\}\in\Omega$ наблюдается поле $s(x,y,t)$ и $s(x,y,\tau)$, представляющее собой фрагмент $\psi(x,y)I_\Omega(x,y)$ пространственного сигнала. Здесь $I_\Omega(x,y)$ - индикаторная функция подобласти, $\tau=(\tau_x, \tau_y)$. неизвестные параметры сдвига

Базисные функции $\varphi_{mn}(x,y)$, используемые для дискретного представления сигнала $s(x,y,\tau)$, определяются аналитическими свойствами самого сигнала и геометрической формой подобласти Ω. В дальнейшем подобласть Ω будем считать прямоугольной. Реализация процедуры сжатия значительно упрощается, если использовать мультипликативный базис $\varphi_{mn}(x,y)=\varphi_m(x)\varphi_n(y)$, где $\varphi_m(x)$ и $\varphi_n(y)$ - одномерные функции, основанные на ортогональных полиномах. Введем нормированную с весом $\rho(z)$ систему полиномов $p_m(z)$**.** Если обозначить через ***a***,***b***- характерные размеры подобласти Ω, то можно ввести ортонормированную систему функций

$$\varphi_m(x)=\sqrt{\frac{\rho(x/a)}{a\cdot d_m}}p_m(x/a), \qquad \varphi_n(y)=\sqrt{\frac{\rho(y/b)}{b\cdot d_n}}p_n(y/b)$$

Тогда для полезного сигнала $s(x,y,\tau)$ имеет место пара преобразований

$$s(x,y,\tau)=\sum_m\sum_n C_{mn}(\tau)\varphi_m(x)\varphi_n(y), \tag{1}$$

$$C_{mn}(\tau)=\iint_\Omega s(x,y,\tau)\varphi_m(x)\varphi_n(y)dxdy=\sqrt{\frac{ab}{d_m d_n}}\int\rho(z_2)p_n(z_2)dz_2\int s(az_1,bz_2)\rho(z_1)p_m(z_1)dz_1$$

Особенностью спектрального разложения (1) по ортогональным полиномам является зависимость формы спектра $C_{mn}(\tau)$ от параметра **τ.**

Структура алгоритма сжатия включает в себя операции преобразования сигнала $s(x,y,\tau)$ в дискретную форму и анализа данных для определения параметров сдвига. Будем считать, что в процессе преобразования вычисляется матрица спектральных коэффициентов $C_{mn}(\tau)$ размерностью M×M, а при анализе обрабатывается матрица размерностью ν×ν. В общем случае M≠ν. Размерность M может меняться в зависимости от допустимого уровня искажений сигнала. Число мод ν определяется вычислительными ресурсами анализатора и допустимыми потерями энергии сигнала. Кроме того, будем полагать, что указанные операции осуществляются при наличии флуктуационного белого шума $\eta(x,y)$ со спектральной плотностью мощности $N_0/2$. Таким образом, на входе анализатора наблюдается процесс

$$\xi(x,y)=s_M(x-\tau_{0x},y-\tau_{0y})+\eta(x,y)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{M}C_{mn}(\tau_0)\varphi_m(x)\varphi_n(y)+\eta(x,y). \tag{2}$$

В выражении (5) $\tau_0=(\tau_{0x},\tau_{0y})$- истинное значение параметра сдвига. При увеличении отношения сигнал/шум предельная форма оператора обнаружения изменений в блоке и оценки вектора движения принимает вид приемника максимального правдоподобия [2]

$$\max L(\tau)\gtrless h, \qquad \tilde{\tau}=arg\ \ sup\,L(\tau),$$

где h - порог, выбираемый в соответствии с некоторым критерием, а $L(\tau)$ - логарифм функционала отношения правдоподобия

$$L(\tau) = \int\limits_{\Omega} (\xi(x,y) - \frac{1}{2}s(x,y,\tau))v(x,y,\tau)dxdy = (2\sum_{m,n} X_{mn}C_{mn}(\tau) - \sum_{m,n} C^2_{mn}(\tau))/N_0 .$$
(3)

Здесь $v(x,y,\tau) = 2s_{\nu}(x,y,\tau)/N_0 = 2\sum_{m,n}^{\nu} C_{mn}(\tau)\varphi_m(x)\varphi_n(y)/N_0$ - опорный сигнал анализатора, $X_{mn} = \int\limits_{\Omega} \xi(x,y)\varphi_m(x)\varphi_n(y)dxdy$.

Дифференцируя логарифм функционала отношения правдоподобия (3) по параметру τ получаем систему уравнений правдоподобия

$$\sum_{m,n}^{\nu}(X_{mn} - C_{mn}(\tau)) \partial C_{mn}(\tau) / \partial\tau_x = 0, \qquad \sum_{mn}^{\nu}(X_{mn} - C_{mn}(\tau)) \partial C_{mn}(\tau) / \partial\tau_y = 0. \quad (4)$$

Если сдвиг сигнала в подобласти Ω не влияет на энергию сигнала, то есть $E(\tau,\nu) = \sum_{mn}^{\nu} C^2_{mn}(\tau) = E(\nu)$, то система уравнений (4) упрощается и принимает вид

$$\sum_{mn}^{\nu} X_{mn} \partial C_{mn}(\tau) / \partial\tau_x = 0 \qquad \sum_{mn}^{\nu} X_{mn} \partial C_{mn}(\tau) / \partial\tau_y = 0. \quad (5)$$

Воспользовавшись рекуррентным соотношением для функций Эрмита [2] можно записать выражения для производных $\partial C_{mn}(\tau)/\partial\tau_x$, $\partial C_{mn}(\tau)/\partial\tau_y$ как

$$\partial C_{mn}(\tau)/\partial\tau_x = \sqrt{m}C_{m-1,n}(\tau) - \sqrt{m+1}C_{m+1,n}(\tau),$$
$$\partial C_{mn}(\tau)/\partial\tau_y = \sqrt{n}C_{m,n-1}(\tau) - \sqrt{n+1}C_{m,n+1}(\tau). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) и (5), получаем окончательную систему уравнений правдоподобия для оценки параметра τ=(τ_x,τ_y). Используем один из методов решения нелинейного уравнения - алгоритм Ньютона - Рафсона. Если $s(x,y,\tau) = s(x - \tau_x)s(y - \tau_y)$. Для такого сигнала $C_{mn}(\tau) = C_m(\tau_x)C_n(\tau_y)$. При этом процедура оценивания распадается на две независимые операции измерения сдвига по координатам x и y. Тогда по каждой из координат имеем итерационную процедуру

$$\tilde{\tau}^{(i+1)} = \tau^{(i)} - \sqrt{2}\lambda_1/\lambda_2. \quad (7)$$

Здесь $\tau^{(i)}$ - некоторое опорное значение параметра в измерителе, полученное на предыдущей итерации, $\tau^{(0)} = t$

$$\lambda_1 = \sum_k X_k(\sqrt{k}C_{k-1}(\tau^{(i)}) - \sqrt{k+1}C_{k+1}(\tau^{(i)})),$$
$$\lambda_2 = \sum_k X_k(\sqrt{k(k-1)}C_{k-2}(\tau^{(i)}) - 2(k+1)C_k(\tau^{(i)}) + \sqrt{(k+1)(k+2)}C_{k+2}(\tau^{(i)})). \quad (8)$$

Параметр τ полагается неэнергетическим. Алгоритм оценки (8) можно переписать в виде

$$\tilde{\tau}^{(i+1)} = \tau^{(i)} + \frac{\sqrt{2}\Big((X_1C_0(\tau^{(i)}) - X_0C_1(\tau^{(i)})) + \sqrt{2}(X_2C_1(\tau^{(i)}) - X_1C_2(\tau^{(i)})) + \ldots\Big)}{X_0C_0(\tau^{(i)}) + 3X_1C_1(\tau^{(i)}) + 5X_2C_2(\tau^{(i)}) - \sqrt{2}(X_0C_2(\tau^{(i)}) + X_1C_0(\tau^{(i)})) + \ldots}$$
(9)

Выражения (8), (9) позволяют дать следующую интерпретацию алгоритму оценки: $C_0(\tau)$,$C_1(\tau)$, … и X_0,X_1,…-значения спектральных коэффициентов, полученные по опорному и анализируемому кадру. В оптимальном дискриминаторе сдвига производится перекрестное перемножение коэффициентов спектральных мод 0⇔1, 1⇔2 и так далее в последовательных кадрах и их вычитание. Ненулевой результат получается только при наличии движения. Анализ дискриминационной характеристики показывает целесообразность использования для оценки параметров 3-5 мод разложения. Число итераций i зависит от начальной расстройки $\tau_0 - t$ и формы сигнала. Расчеты показывают, что это число колеблется от 5 до 20 для достижения погрешности в оценке сдвига порядка 0.1 пикселя.

Оценки $\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y$, получаемые из решения уравнений (4), (5) являются асимптотически несмещенными, эффективными и в общем случае коррелированными. Однако, если выполняется условие симметрии сигнала s(x,y,τ) по переменным x,y, то матрица Фишера становится диагональной. Тогда дисперсии оценок $\tilde{\tau}_x, \tilde{\tau}_y$ равны

$$D(\tilde{\tau}_x) = N_0 a^2 \left[\sum_{m,n}^{\nu} \left((2m+1)C_{mn}^2 - \sqrt{m(m-1)}C_{mn}C_{m-2,n} - \sqrt{(m+1)(m+2)}C_{mn}C_{m+2,n} \right) \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$D(\tilde{\tau}_y) = N_0 b^2 \left[\sum_{m,n}^{\nu} \left((2n+1)C_{mn}^2 - \sqrt{n(n-1)}C_{mn}C_{m,n-2} - \sqrt{(n+1)(n+2)}C_{mn}C_{m,n+2} \right) \right]^{-1}.$$

Здесь обозначено $C_{mn} = C_{mn}(\tau_0)$.

Таким образом, сжатие сигналов с помощью ортогональных полиномов оказывается весьма эффективным при обнаружении полезного сигнала (или межкадровых изменений изображений), а также оценке параметра сдвига при регулируемой размерности массива спектральных коэффициентов или при ограниченных вычислительных ресурсах анализатора принятого сигнала.

Литература

1. Радченко Ю.С., Радченко М.Ю. Оптимальные быстрые алгоритмы представления изображений в базисе ортогональных полиномов. Труды 1 международной конференции «Цифровая обработка сигналов и ее применения» -DSPA’98, 1998, Москва, т. III, с. 163-166
2. . Радченко Ю.С., Кожин А.Ю., Радченко М.Ю. Быстрое обнаружение и оценка параметра сдвига сигналов, сжатых с помощью ортогональных полиномов. «Радиотехника», 1999, № 6, (вып. 37), с. 17-19
3. Радченко Ю.С. Алгоритм сжатия изображений на основе полиномиальных преобразований. Цифровая обработка сигналов, 2002, №1, с.2-6