ВЛИЯНИЕ ШУМОВ ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РЕГРЕССИОННОЙ МАТРИЦЫ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ МНК-ОЦЕНОК

Василюк Н.Н.

Московский физико-технический институт, кафедра радиолокационных и управляющих систем, 129626, г.Москва, пр.Мира 102, ОАО «Импульс», отдел 3. E-mail: lab306@impuls.ru.

Реферат. Рассмотрен случай линейной МНК-оценки, элементы матрицы регрессоров, которой, определяются по результатам зашумлённых измерений. Показана смещённость такой оценки, в линейном приближении. Получены приближённые формулы для смещения и дисперсии оценки.

Введение.

Согласно [1], линейный метод наименьших квадратов (МНК) даёт несмещённую оценку вектора параметров, если матрица фундаментальной системы уравнений (матрица регрессоров) неслучайна. Однако, на практике (например, при идентификации системы по результатам измерения входных и выходных воздействий), возникает необходимость обработать результаты измерений, регрессионная матрица которых, также была получена экспериментально.

Если избыточный вектор измерений можно выразить в виде линейного выражения

$$\mathbf{z} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{e}_z \tag{1}$$

где: $\mathbf{H}$ - истинная матрица регрессоров, размером $m \times n$ ($m>n$); $\mathbf{z} = [z_1, z_2, ..., z_m]^T$ - вектор результатов наблюдений; $\mathbf{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]^T$ - оцениваемый вектор параметров; $\mathbf{e}_z = [e_{z1}, e_{z2}, ...e_{zm}]^T$ - вектор шумов измерения;

то, состоятельная и несмещённая МНК-оценка $\mathbf{x}'_0$ вектора неизвестных параметров $\mathbf{x}$ представляется в виде[1]:

$$\mathbf{x}'_0 = \left(\mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{z} \tag{2}$$

где: $\mathbf{W} = \mathbf{R}_z^{-1}$ - весовая матрица, равная обратной ковариационной матрице шумов измерений в (1). В случае экспериментального определения регрессионной матрицы, зашумлённая матрица регрессоров $\mathbf{H}'$, связана с истинной матрицей регрессоров $\mathbf{H}$ соотношением:

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{e}_h \tag{3}$$

где: $\mathbf{e}_h = \{e_{hij}\}_{i=1..m}^{j=1..n}$ - матрица шумов элементов регрессионной матрицы.

Поэтому, оценка $\mathbf{x}'$, полученная по формуле (2), с использованием матрицы (3), имеет вид:

$$\mathbf{x}' = \left((\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)^\mathbf{T}\mathbf{W}(\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)\right)^{-1}(\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{z} \tag{4}$$

В работе анализируются статистические свойства оценки (4). Шумы измерения в (1) и (2) предполагаются центрированными, гауссовыми, причём шумы отдельных измерений (1) предполагаются независимыми, а шумы регрессионной матрицы коррелируют только в пределах одной строки:

$$\begin{aligned} R_{zij} &= \mathbf{M}\{e_{zi}e_{zj}\} = \sigma_z^2\delta_{ij}, i, j = 1..m; \\ R_{hijkl} &= \mathbf{M}\{e_{hij}e_{hkl}\} = R_{hjl}\delta_{ik}, i, k = 1..m; j, l = 1..n; \end{aligned} \tag{5}$$

Вычисление математического ожидания и дисперсии оценки

Если шумы измерения элементов регрессионной матрицы в (3) малы настолько, что квадратом шумовой компоненты можно пренебречь, причём $\left\|\mathbf{e_1}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\right\| < 1$, обратную матрицу в (4) можно представить в виде:

$$\begin{gathered} \left((\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)^T\mathbf{W}(\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)\right)^{-1} \approx \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H} + \mathbf{e}_1\right)^{-1} \\ \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_h^T\mathbf{W}\mathbf{H} + \mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{e}_h \end{gathered} \tag{6}$$

Разлагая (6) в матричный ряд в окрестности незашумлённого значения $\mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{W}\mathbf{H}$, получаем линеаризованное выражение для обратной матрицы:

$$\left((\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)^T\mathbf{W}(\mathbf{H}+\mathbf{e}_h)\right)^{-1} \approx \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1} - \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_1\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1} \tag{7}$$

Из (2), (4) и (7) получается линеаризованное выражение для оценки (4) и смещения оценки $\Delta\mathbf{x}'$:

$$\begin{gathered} \mathbf{x}' \approx \mathbf{x}'_0 + \Delta\mathbf{x}' \\ \Delta\mathbf{x}' = -\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_1\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{z} + \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_h^T\mathbf{W}\mathbf{z} - \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_1\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_h^T\mathbf{W}\mathbf{z} \end{gathered} \tag{8}$$

Поскольку шумы матрицы регрессоров предполагаются центрированными и не коррелируют с шумами, измерения, математическое ожидание оценки (8) имеет вид:

$$\mathbf{M}\{\mathbf{x}'\} = \mathbf{M}\{\mathbf{x}'_0\} - \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{M}\left\{\mathbf{e}_1\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_h^T\right\}\mathbf{W}\mathbf{M}\{\mathbf{z}\} \tag{9}$$

Раскрывая математические ожидания в (9), и учитывая симметричность корреляционных и весовых матриц, можно получить развёрнутые выражения для математического ожидания $\mathbf{M}\{\mathbf{x}'\}$ и смещения $\mathbf{M}\{\Delta\mathbf{x}'\}$ линеаризованной оценки (4):

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\{\mathbf{x}'\} = \mathbf{M}\{\mathbf{x}'_0\} - \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\left[\mathbf{R}_h\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1} + \mathbf{I}_m tr\left(\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{R}_h\right)\right]\mathbf{H}^T\mathbf{W}^2\mathbf{M}\{\mathbf{z}\}\\ \mathbf{M}\{\Delta\mathbf{x}'\} = -\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\left[\mathbf{R}_h\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1} + \mathbf{I}_m tr\left(\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{R}_h\right)\right]\mathbf{H}^T\mathbf{W}^2\mathbf{H}\mathbf{x}\end{gathered} \tag{10}$$

Поскольку математическое ожидание вектора измерений $\mathbf{M}\{\mathbf{z}\} = \mathbf{H}\mathbf{x}$, в общем случае, не равно нулевому вектору, выражение (10) показывает, что оценка (4) является смещённой, причём смещение оценки, по зашумлённой матрице регрессоров, линейно зависит от величины неизвестного вектора оцениваемых параметров и ковариации шумов измерения элементов регрессионной матрицы.

Поскольку незашумлённая оценка является состоятельной, поэтому для ковариационной матрицы этой оценки справедливо $\left\|\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\right\| \to 0$ при увеличении числа измерений. Если число измерений достаточно велико, то для удобного выражения ковариации оценки (4), в выражении для смещения (8), можно отбросить члены, в которые ковариационная матрица оценки (2) и матрица шумов измерения (3), входят со степенями выше первой. Поскольку для линеаризованного смещения (8) $\mathbf{M}\{\Delta\mathbf{x}'\} = 0$, получаем выражение для ковариационной матрицы оценки (8):

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\left\{\left(\mathbf{x}' - \mathbf{M}\{\mathbf{x}'\}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{M}\{\mathbf{x}'\}\right)^T\right\} = \mathbf{M}\left\{\left(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{M}\{\mathbf{x}'_0\}\right)\left(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{M}\{\mathbf{x}'_0\}\right)^T\right\} + \mathbf{M}\left\{\Delta\mathbf{x}'\Delta\mathbf{x}'^T\right\}\\ \Delta\mathbf{x}'\Delta\mathbf{x}'^{\mathbf{T}} \approx \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{e}_h^T\mathbf{W}\mathbf{z}\mathbf{z}^T\mathbf{W}\mathbf{e}_h\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\end{gathered} \tag{11}$$

Первое слагаемое в (11) является ковариацией незашумлённой оценки (2). Вычисляя математическое ожидание от второго слагаемого в (11), с учётом независимости измерительных шумов в (1) и (3), получаем явное выражение для ковариации оценки (2):

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\left\{\left(\mathbf{x}' - \mathbf{M}\{\mathbf{x}'\}\right)\left(\mathbf{x}' - \mathbf{M}\{\mathbf{x}'\}\right)^T\right\} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\\ + \left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\left(\mathbf{R}_h tr\left(\mathbf{W}\mathbf{H}\mathbf{x}\mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{W}\right) + \mathbf{R}_h tr\left(\mathbf{W}\mathbf{R}_z\mathbf{W}\right)\right)\left(\mathbf{H}^T\mathbf{W}\mathbf{H}\right)^{-1}\end{gathered} \tag{12}$$

Из (12) видно, что норма ковариационной матрицы зашумлённой оценки (3) больше нормы ковариационной матрицы оценки (1), но во втором порядке малости.

Заключение.

Рассмотрены свойства линейной оценки, получаемой по формулам МНК-оценки, регрессионная матрица которой определяется экспериментально. Показано, что такая оценка является смещённой. Получено выражение для смещения оценки, величина которого линейно зависит от ковариаций шумов измерения элементов регрессионной матрицы и величины определяемого вектора параметров. Показано, что дисперсия такой оценки содержит члены второго порядка малости относительно ковариационной матрицы незашумлённой оценки.

Литература

1. В.И.Мудров, В.Л.Кушко, Методы обработки измерений. Квазиправдоподобные оценки, М: Радио и связь, 1983.