

В различных областях науки и техники находят применение сложные сигналы с линейным изменением периода их следования. Известны методы их формирования [1, 2], при которых периоды $\{T_n\}$ изменяются в геометрической прогрессии со знаменателем q , определяясь выражением

$$\{T_n = qT_{n-1} = q^{n-1}T_1\}, \quad (1)$$

где n - целые неотрицательные числа.

Поскольку геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью первого порядка, на ее основе возможно создание способа формирования сигнала с применением чисел Фибоначчи и золотой p -пропорции, являющихся членами возвратных последовательностей второго порядка [3 - 5].

Формирование сигнала с использованием классической золотой пропорции

Пусть заданы два первых периода T_1 и T_2 . Каждые последующие периоды формируются суммированием значений двух предыдущих $\{T_n = T_{n-2} + T_{n-1}\}$, что эквивалентно умножению каждого предыдущего периода (1) на коэффициент $q = (1 + \sqrt{5})/2 = 0,618033989\dots$, обозначаемый α , поскольку является результатом деления отрезков в золотой пропорции [2]. Смена полученных периодов

$$\{T_n = T_{n-2} + T_{n-1} = \alpha T_{n-1} = \alpha^{n-1}T_1\} \quad (2)$$

происходит в моменты времени

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = t_{n-1} + T_n = (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1})T_1 = T_1(\alpha^n - 1)/(\alpha - 1), \quad (3)$$

в которые формируются короткие импульсы, характеризующие нуль-переходы сигнала золотой пропорции $s(t)$ (рис.1).

Сигнал, функционально преобразованный путем гармонического заполнения интервалов T_k частотой $f_k(t)$ амплитудой U , определяется выражением

$$s(t) = U \sum_{k=1}^n f_k(t) = U \sum_{k=1}^n \sin \frac{2\pi}{T_k - T_{k-1}} (t - T_{k-1}), \text{ где } T_{k-1} \leq t < T_k; k = 1, 2, \dots, n. \quad (4)$$

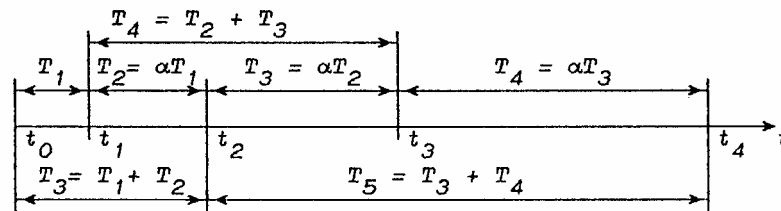


Рис.1. Формирование временных интервалов по закону возвратной последовательности.

Последовательности (2) и (3), выраженные через числа Фибоначчи, примут вид

$$\left\{ \begin{aligned} &T_1, T_2, \\ &T_1 + T_2, T_1 + 2T_2, 2T_1 + 3T_2, 3T_1 + 5T_2, \dots, \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right)T_1 + \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)T_2, \end{aligned} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ t_n = t_{n-1} + T_n = \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)T_1 + \left(\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1\right)T_2 \right\}, \text{ где } \beta = -\frac{1}{\alpha} = -0,618\dots \quad (6)$$

Формула для представления α в виде цепного корня:

$$2^n \sqrt{\left(\left(\left(\sqrt{5}^2 - 2\right)^2 - 2\right)^2 - \dots\right)^2 - 2} \text{ или } 2^{n+2} \sqrt{\left(\left(7^2 - 2\right)^2 - \dots\right)^2 - 2},$$

где n - количество степеней под знаком корня.

Например, $\sqrt[2^5]{\left(\left(\left(\left(\left(\sqrt{5}-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2-2\right)^2} = \sqrt[32]{4870847} \approx 1,618033989$.

Значение $T_1 = 1$ в (2) дает округленный ряд чисел, характеризующих степени золотой пропорции, 1; 1,618; 2,618; 4,236; 6,854; 11,09; 17,944; 29,034; ..., дальнейшее округление которых до целых (без учета второго члена ряда, равного 1,618) приводит к ряду Люка 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, ..., $\alpha^n + \beta^n$. Он, среди других возвратных последовательностей, выраженных целыми числами, наиболее точно повторяет последовательность (2), основанную на коэффициенте золотого деления α . Впрочем, любая последовательность, сформированная по способу суммирования (2) и (3), характеризует сигнал золотой пропорции.

1,	2,	3,	5,	8,	...	$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\sqrt{5}}$
1,	3,	4,	7,	11,	...	$\alpha^n + \beta^n$
2,	5,	7,	12,	19,	...	$\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{5}}\alpha^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-4}{\sqrt{5}}\beta^{n-1}$
3,	7,	10,	17,	27,	...	$\frac{3\sqrt{5}+11}{2\sqrt{5}}\alpha^{n-1} + \frac{3\sqrt{5}-11}{2\sqrt{5}}\beta^{n-1}$
4,	9,	13,	22,	35,	...	$\frac{2\sqrt{5}+7}{\sqrt{5}}\alpha^{n-1} + \frac{2\sqrt{5}-7}{\sqrt{5}}\beta^{n-1}$
5,	11,	16,	27,	43,	...	$\frac{5\sqrt{5}+17}{2\sqrt{5}}\alpha^{n-1} + \frac{5\sqrt{5}-17}{2\sqrt{5}}\beta^{n-1}$
$k,$	$2k+1,$	$3k+1,$	$5k+2,$	$8k+3,$...	$\frac{(\sqrt{5}+3)k+2}{2\sqrt{5}}\alpha^{n-1} + \frac{(\sqrt{5}-3)k-2}{2\sqrt{5}}\beta^{n-1}$

Сигнал, сформированный на основе возвратной последовательности, обладает высокой стабильностью закона формирования периода, характеризуется большей девиацией частоты по сравнению с сигналами, полученными путем умножения предыдущих значений периодов (1) на коэффициент q , выраженный целыми числами.

Способ формирования сигнала включает в себя операции, основанные на алгоритме работы пересчетных структур с кодами m , в качестве которых могут использоваться реверсивные счетчики.

Алгоритм работы пересчетных реверсивных структур

РЕВЕРСИВНЫЕ СЧЕТЧИКИ		ИСХ. СОСТ.	t_0	t_1	t_2	t_k	t_{k+1}	t_{k+2}
			T_1	T_2	T_k	T_{k+1}	T_{k+2}	
РС1	режим		-	+	+		-	+
	код	m_1	m_0	m_2	m_k		m_0	m_{k+1}
			m_{k+1}					
РС2	режим		+	+	-		+	+
	код	0	m_1	m_2	m_0		m_{k+1}	m_{k+2}
			m_k				m_{k+3}	
РС3	режим		сохр.	-	+		+	-
	код	m_2	исх. сост.	m_0	m_k		m_{k+1}	m_0
					m_{k+2}			

где $m_1 = T_1 / T_0$; $m_2 = T_2 / T_0$; $m_k = m_{k-2} + m_{k-1} = (T_{k-2} + T_{k-1}) / T_0$ при $k = 3, 4, \dots, n$,
 $T_k = m_k T_0 = (m_{k-2} + m_{k-1}) T_0 = T_{k-2} + T_{k-1}$.

Формирователь сигнала (рис.2) содержит задающий генератор ЗГ, входную шину, реверсивные счетчики РС1, РС2 и РС3, блоки управления БУ1 и БУ2, элемент совпадения ЭС, блоки совпадения БС1, БС2 и БС3, элементы разделительные ИЛИ ЭР1 и ЭР2, стробирующий блок СБ. БУ могут быть выполнены в виде шифраторов. Формирователь работает следующим образом.

В исходном состоянии при отсутствии запускающего входного видеопульса ЗГ формирует высокостабильную последовательность импульсов с постоянным периодом следования $T_0 = 1/f$. РС1 находится в положении, при котором на его выходах установлен код, т.е. записано число m_1 такое, чтобы его сосчитать частотой f за время $T_1 = m_1 T_0$, а РС3 - в положении, при котором на его выходах установлен код m_2 такой, что его сосчитать за время $T_2 = m_2 T_0$. На выходах РС2 присутствуют потенциалы логического нуля. Начальные коды РС1 и РС3 устанавливаются с помощью БУ1 и БУ2 в момент подачи на формирователь напряжения питания. Нулевое состояние РС2 обеспечивается присутствием на его входе "установка нуля" нулевого потенциала, действующего на выходе ЭС.

С приходом в момент t_0 на вход устройства входного сигнала, являющегося последовательностью видеопульсов с заданным периодом следования и длительностью, РС1 начинает считываться, поскольку на его входе "вычитание" присутствует потенциал логической единицы с выхода СБ, а РС2 начинает заполняться, т.к. на его входе "сложение" присутствует единичный потенциал с выхода СБ. РС1 считывается до момента t_1 , когда на его выходах устанавливается код m_0 , равный коду БС1. При этом на выходе БС1 формируется импульс, который через ЭР1 поступает на вход СБ и через ЭР2 - на выход формирователя. За время $T_1 = t_1 - t_0$ РС2 оказывается заполненным до кода $m_1 = T_1 / T_0$. РС3 своего состояния не изменяет.

В момент t_1 на выходе СБ потенциал изменится на обратный. РС1 начинает заполняться, РС2 продолжает заполняться, РС3 начинает считываться. За время $T_2 = m_2 T_0$ РС3 считывается до кода m_0 , на что реагирует БС3 и на его выходе в момент t_2 формируется импульс, который через ЭР1 поступает на вход СБ и через ЭР2 - на выход формирователя. РС2, до этого продолжая заполняться, за время $T_2 = t_2 - t_1$ получает количество импульсов, соответствующее коду m_2 , или в целом к моменту t_2 за время $T_1 + T_2$ в РС3 записывается код $m_3 = (T_1 + T_2) / T_0 = m_1 + m_2$. За время T_2 РС1 заполнится до кода m_2 .

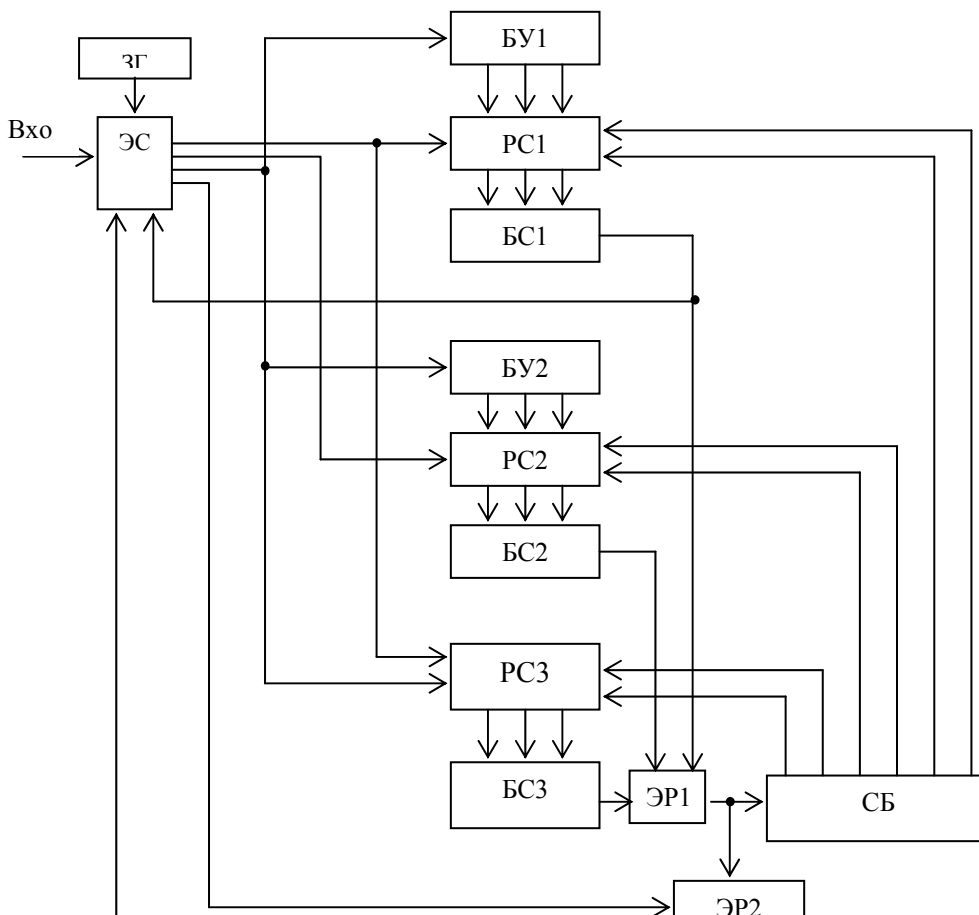


Рис.2. Формирователь сигнала золотой пропорции

Выходной импульс БС3 в момент t_2 приведет к изменению выходных потенциалов СБ, отчего РС2 переводится в режим “вычитание”, РС3 - в режим “сложение”, а режим РС1 остается без изменения. РС2 считывается до кода m_0 за время $T_3 = t_3 - t_2 = m_3 T_0 = (m_1 + m_2) T_0 = T_1 + T_2$.

В момент времени t_3 импульс с выхода БС2 через ЭР1 поступает на вход СБ и через ЭР2 на вход формирователя. За время T_3 в РС1 поступает количество импульсов, соответствующее коду m_3 , а в целом к моменту t_3 в РС1 записывается код $m_4 = (T_2 + T_3) / T_0 = m_2 + m_3$. За время T_3 РС3 заполняется до кода $m_3 = T_3 / T_0$. В момент t_3 на выходах СБ потенциалы изменятся, в результате РС2 переводиться в режим “сложение”, а РС1 начинает считываться и через время $T_4 = t_4 - t_3 = m_4 T_0 = (m_2 + m_3) T_0 = T_2 + T_3$ считывается до кода m_0 .

В момент времени t_4 на выходе БС1 формируется импульс, который через ЭР1 воздействует на СБ, изменяя потенциалы на его выходах, и через ЭР2 поступает на выход формирователя. С этого момента РС3, в котором записан код $m_5 = (T_3 + T_4) / T_0 = m_3 + m_4$, начинает считываться, РС1 заполняется, а РС2, заполненный до кода $m_4 = T_4 / T_0$, продолжает заполняться. Далее процессы в схеме повторяются.

По окончании видеоимпульса на входе формирователя его задний фронт синхронизируется выходными импульсами формирователя. ЭС закрывается, не пропуская тактовые импульсы ЗГ на счетные входы всех РС. При этом РС2 обнуляется, а в РС1 и РС3 подтверждаются исходные состояния, соответствующие кодам m_1 и m_2 для формирования начальных периодов T_1 и T_2 . В результате на выходе ЭР2, а, следовательно, и выходе устройства, формируется эталонная последовательность коротких импульсов в моменты времени (3), что соответствует периодам, выраженным последовательностью (2), равным выражению (5).

Спектр сигнала (4), найденный с использованием дискретного преобразования Фурье, определяется формулой

$$|S(\omega)| = 2\pi \sqrt{\left[\sum_{k=1}^n B_k (\cos \omega T_{k-1} - \cos \omega T_k) \right]^2 + \left[\sum_{k=1}^n B_k (\sin \omega T_{k-1} - \sin \omega T_k) \right]^2}, \quad (7)$$

где: $B_k = \frac{U_k}{\gamma_k (T_k - T_{k-1})}$; $\gamma_k = \frac{4\pi^2}{(T_k - T_{k-1})^2} - \omega^2$; $T_k = T_{k-2} + T_{k-1}$.

Спектр (7) сигнала имеет лепестковую структуру. Максимальное значение основного лепестка спектра $S(\omega)_m$ с ростом числа периодов также возрастает по закону возвратной последовательности второго порядка, т.е. $S(\omega)_{m_k} = S(\omega)_{m_{k-2}} + S(\omega)_{m_{k-1}}$. При этом положение лепестка на оси частот ω_m определяется спадающим характером того же закона $\omega_{m_k} = \omega_{m_{k-2}} - \omega_{m_{k-1}}$. Найденная закономерность изменения параметров основного лепестка спектра может быть использована, например, в теории кодирования сигналов.

Повышение девиации частоты возможно путем формирования сигналов, основанных на коэффициентах α_p обобщенной золотой p -пропорции.

Формирование сигнала с использованием золотых p -пропорций

В [5] показано, что результатом деления отрезка в пропорции, при которой отношение его большей части к меньшей равно p -ой степени отношения всего отрезка к большей части, является соотношение вида

$$x^{p+1} - x^p = 1, \text{ где } p - \text{целые, неотрицательные числа, } p < n. \quad (8)$$

Положительный корень уравнения (8) обозначают α_p , различные значения которого позволяют рассмотреть несколько частных случаев формирования периодов. При $p = 0$ деление соответствует делению на две равные части. При $p = 1$ деление сводится к классическому золотому делению, рассмотренному выше. При $p = 2$ уравнение (8) примет вид

$$\alpha_2^3 - \alpha_2^2 = 1. \quad (9)$$

Его положительный корень равен $\alpha_2 = 1,4655712\dots$. Каждый последующий период такого сигнала формируется путем суммирования длительности предыдущего периода T_{k-1} и через одного от него T_{k-3} .

Действительно, $\alpha_2 = \frac{T_k}{T_{k-1}} = \frac{T_{k-1} + T_{k-3}}{T_{k-1}} = 1 + \frac{T_{k-3}}{T_{k-1}} = 1 + \frac{1}{\alpha_2^2}$, что соответствует уравнению (9).

Следовательно, соотношение $\{T_n = T_{n-1} + T_{n-3}\}$ справедливо для (9). При этом значения первых трех периодов необходимо задать. В результате каждый из сигналов, соответствующих α_p , может быть получен путем суммирования предыдущего периода T_{n-1} с T_{n-p-1} , а значения периодов с T_1 по T_{p+1} задаются. С ростом p величина α_p уменьшается, повышая девиацию частоты сигнала золотой пропорции.

p	α_p	$T_k = T_{k-p-1} + T_{k-1}$	$\alpha^{p+1} - \alpha^p = 1$
1	1,6180339	$T_{k-2} + T_{k-1}$	$\alpha^2 - \alpha = 1$
2	1,4655712	$T_{k-3} + T_{k-1}$	$\alpha^3 - \alpha^2 = 1$
3	1,3802775	$T_{k-4} + T_{k-1}$	$\alpha^4 - \alpha^3 = 1$
4	1,3247179	$T_{k-5} + T_{k-1}$	$\alpha^5 - \alpha^4 = 1$
5	1,285199	$T_{k-6} + T_{k-1}$	$\alpha^6 - \alpha^5 = 1$

Выводы

Применение чисел Фибоначчи и золотой p -пропорции позволяет формировать прецизионный сигнал, длительность периодов которого изменяется по линейному закону, с использованием элементов цифровой техники.

Литература

1. Кальмушевский И.И., Панфилов И.П. Передача цифровой информации полиномиальными сигналами. – Одесса: ОЭИС им. А.С. Попова, 1989, с.80.
2. Шенягин В.П., Битюков В.К. Методы формирования ЛПМ-сигнала // Материалы международной научно-практической конференции “Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения”, 9 - 12 июня 2003 г., г. Москва: Тез. докл. – М.: МИРЭА, 2003, с.228-233.
3. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности - М.: Наука, 1983.
4. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978.
5. Стахов А.П. Коды золотой пропорции.- М.: Радио и связь, 1984. - 152 с.