СИНТЕЗ ОРТОГОНАЛЬНЫХ И БИОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОМЕРНЫХ БАНКОВ ФИЛЬТРОВ

Чобану[1] М.К., Большакова О.В.

Московский энергетический институт (технический университет)
105835, ГСП, Москва Е-250, ул. Красноказарменная, д.17
Тел.: 7 (095) 362 7463, E-mail: TMK@vvk2.mpei.ac.ru, OVB@vvk2.mpei.ac.ru

Предложены три основных способа проектирования банков фильтров для многоскоростных систем обработки многомерных сигналов. Первый метод основан на применении полиномов Бернштейна. Второй метод использует структурные и полиномиальные подходы. Третий метод позволяет достроить полифазную матрицу одного из банков по его части (строке/столбцу). Все три метода обеспечивают выполнение заданных требований к фильтрам.

Рассматриваются три метода построения банков фильтров (БФ) для многоскоростных систем.

Первый метод позволяет синтезировать двумерные (2D), трехмерные (3D) и четырехмерные (4D) биортогональные банки фильтров (БФ) для 2-хканальных многоскоростных систем. Данный подход основан на применении полиномов Бернштейна [1, 2, 3, 5]. В 2D случае это полиномы:

$$b_{i,j}^N(x,y) = C_N^i C_N^j x^i (1-x)^{N-i} y^j (1-y)^{N-j}.$$

Полином Бернштейна позволяет получить БФ с максимальным числом нулевых производных (с заданной степенью гладкости), со свойствами точного восстановления сигнала (ТВС) и ЛФ при любых размерах фильтра. Степень гладкости в начале координат и на краях полосы пропускания задается числом N. Теория и методы получены для проектирования БФ, в котором импульсные характеристики фильтра, шкалирующие и вейвлет функции имеют квадратную опорную область. Важно и то, что получаемые БФ являются неразделимыми.

Необходимо найти передаточную характеристику фильтра H_0, которая находится непосредственно с помощью полинома Бернштейна [2]. Фильтр H_1 может быть получен как $H_1(\mathbf{z}) = -z_1^{-1}(2(H_0^M(\mathbf{z}) - 0.5)H_0^N(\mathbf{z}) - 1)$, где N и M – степени гладкости фильтров.

Второй метод позволяет построить ортогональные банки фильтров (БФ) для двумерных 4-хканальных многоскоростных систем. Подход состоит в рассмотрении каскадных форм, гарантирующих структурную ортогональность, линейность фазы (ЛФ) и гладкость характеристик. Каскадная форма позволяет уменьшить число неизвестных. Их выбор осуществляется при оптимизации нелинейной задачи. Такой каскад не полный, т.е. не любой ортогональный БФ с ЛФ может быть описан этой формой.

Полифазная матрица будет равна [4]

$$H(z_1, z_2) = \mathbf{R_1 W P} \prod_{i=2}^{K} \mathbf{D}(z_1, z_2)\mathbf{P W R_i W P}, \text{ где}$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & 0 & 0 \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\beta_i & -\sin\beta_i \\ 0 & 0 & \sin\beta_i & \cos\beta_i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 z_2 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\mathrm{H}_j(z_1, z_2) = H_{j,0}(z_1^2, z_2^2) + H_{j,1}(z_1^2, z_2^2) z_1 + H_{j,2}(z_1^2, z_2^2) z_2 + H_{j,3}(z_1^2, z_2^2) z_1 z_2, \; j = 0 \ldots 3$$

Фильтры H_0 и H_1 являются симметричными, а H_2 и H_3 - антисимметричными. Каждый фильтр имеет ЛФ и импульсную характеристику квадратной формы размером $2K \times 2K$. Полученный БФ

[1] Работа выполнена в рамках гранта № Т02-03.1-2522 и программы № 209.01.01.044 Минобразования России.

ортогонален. Для заданного K нужно выбрать углы $\alpha_1 \ldots \alpha_K$ и $\beta_1 \ldots \beta_K$. Необходимо получить максимально плоские фильтры из условия равенства нулю производных $\frac{\partial^{k_1+k_2} H_j}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}} = 0$ в точках $(1,1), (1,-1), (-1,1)$ или $(-1,-1)$. Построены соответствующие вейвлет функции.

Третий метод заключается в достройке унимодулярной прямоугольной полиномиальной матрицы ***E(z)*** размером $p \times q$ ($p>q$) до инвертируемой полифазной матрицы $H(z_1, z_2)$. Метод основан на теореме Куиллин-Суслина. В одномерном случае метод основан на применении метода исключения Гаусса и алгоритме Евклида. Имеются несколько алгоритмов, основанных на технике базисов Грёбнера. Сначала решается уравнение $F(z)E(z)=I_q$, где многомерные полиномиальные матрицы

$$\mathrm{E(z), F(z)} \in A_P(\mathrm{z}^\Gamma) = \{\mathrm{B(z}^\Gamma) = \sum_{\mathrm{x}\in\Gamma} \mathrm{b(x)z^x} \,|\, \mathrm{b(x)} \in \mathrm{R},$$

а $A_P(\mathrm{z}^\Gamma)$ является обобщенным полиномиальным кольцом Лорана. Частное решение $F_{part}(z)$ находится с помощью базисов Грёбнера. В результате находятся S_i, i=1,…,k и диагональная матрица ***D*** такие, что

$$\mathrm{D(z)S_k(z)\ldots S_1(z)E(z)} = \widetilde{\mathrm{S}}\mathrm{(z)E(z)} = (\mathrm{I_q}\; 0\ldots 0)^{\mathrm{T}}, \mathrm{F_{part}(z)} = (\mathrm{I_q}\; 0\ldots 0)\widetilde{\mathrm{S}}\mathrm{(z)} \;.$$

Унимодулярным расширением ***E(z)*** будет $\widetilde{S}^{-1}(z)$ такое, что

$$\mathrm{F_{part}(z)}\widetilde{\mathrm{S}}^{-1}\mathrm{(z)} = (\mathrm{I_q}\; 0\ldots 0)\widetilde{\mathrm{S}}\mathrm{(z)}\widetilde{\mathrm{S}}^{-1}\mathrm{(z)} = (\mathrm{I_q}\; 0\ldots 0).$$

Были построены БФ для 2-хканальных многоскоростных систем для 2D, 3D и 4D случаев [3, 5].

Литература

1. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Часть 1. Теория // Вестник МЭИ, 2003. №2, 75-82.
2. Чобану М.К. Многомерные многоскоростные системы и многомерные вейвлет-функции. Часть 2. Синтез // Вестник МЭИ, 2003. №3, 69-78
3. Большакова О.В. Синтез четырехмерных банков фильтров с помощью полиномов Бернштейна. 5-я Международная конференция и выставка ‘Цифровая обработка сигналов и ее применение’, 12-14 марта 2003г., Москва, Россия, Т.1, с. 158-161.
4. Tchobanou M.K., Bolshakova O.V. Synthesis of two-dimensional filter banks and wavelet functions. International conference “Wavelets and Splines” July 3-8, 2003, St. Petersburg, Russia, p. 95-96
5. Tchobanou M., Mironov V., Klyushkin V., Rychkov A., Stepachew A., Bolshakova O.,Woodburn C. Design and implementation of 2-D and 3-D multirate systems. Proc. 2nd International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing, SMMSP-2002, p. 83-86, Toulouse, France, 2002